سلسلۂ نصابات علم ریاضی جامعۂ عثمانیہ

تفرقی مساواتیں

ایڈورڈ کے تکملی احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ

از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات، کلیۂ جامعۂ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

۱۳۴۱ھ — ۱۳۳۲ف — ۱۹۲۳ع

دارالطبع جامعۂ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرس میکملن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

فہرست مضامین

تفرقی مساواتیں

تفرّقی مساواتیں

باب اوّل

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

متغیر جدائی پذیر۔ خطی مساواتیں

۱۔ تکمّلی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عام طریقوں کا سرسری ذکر کردینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کار آمد ہوں گی۔

اس جگہ ہم ان تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کرینگے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔

۲۔ تفرقی مساوات کی تکوین

ذراسی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے "حل" کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔

اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = ۰ .... (۱)

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لیئے ا کی ایک خاص قیمت ہے جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر بالتمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلومہ قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلومہ (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعیل زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئیے ورنہ پورے قبیل پر ایک ساتھ عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہونگے۔

ا اس طرح ساقط ہو سکتا ہے:۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

فہ (لا، ما) = ا .... (۲)

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے ایک مساوات لا، ما اور ما میں حاصل ہوتی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنانے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = ۰ .... (۱)

کا بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = 0 \quad \text{............ (۳)}$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے ا کو ساقط کرنے سے ایک ربط لا، ما، ما' میں حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔
مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات

ما = م لا

میں اختیاری مستقل م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

م کے لئے حل کرنے سے   ما/لا = م

تفرق کرنے سے   (لا ما' − ما)/لا² = ۰

یا   ما = لا ما'

یا بطرز دیگر   م کے لئے حل کرنے کے بغیر

ما' = م

اس لئے   ما = لا ما'

یہ مساوات اُن تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اُس کے کسی نقطہ پر وہی ہے جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملانے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

ف (لا، ما، ا، ب) = ۰ .... (۱)

ہے جس میں دو اختیاری مستقل ا، ب ہیں اور قبیل کے مختلف منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ بلحاظ لا کے اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے لا، ما، ما'، ا، ب میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

فہ (لا، ما، ما'، ا، ب) = ۰ .... (۲)

اگر ایک دفعہ اور بلحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو لا، ما، ما$_۱$، ما$_۲$، ا، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کرو کہ یہ حسب ذیل ہے

صہ (لا، ما، ما$_۱$، ما$_۲$، ا، ب) = ۰ ....(۳)

ان تین مساواتوں سے ا، ب ساقط ہو سکتے ہیں، کم از کم نظری لحاظ سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے)، اس طرح لا، ما، ما$_۱$، ما$_۲$ کو باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما$_۱$، ما$_۲$) = ۰

حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔

۴۔ مساوات کا رتبہ

تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ اُس اعلیٰ ترین تفرقی سر سے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔

ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیاری مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

یہ استدلال بالکل عام ہے، ن اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے ہمیں ن دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، ما$_۱$، ما$_۲$.... ما$_ن$ کو باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صریحاً ن ہوگا۔

مثال ۱۔ مساوات لا^۲ + ما^۲ = ۲ الا + ج سے ا اور ج کو ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما ما$_۱$ = ا

دوبارہ تفرق کرنے سے ۱ + ما$_۱^۲$ + ما ما$_۲$ = ۰

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسر

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی سر اس حل کا ہے) جو اُن تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر واقع ہوتے ہیں ۔

مثال ۲ ۔ اُن تمام مرکزدار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم کرو جن کے محور محددوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں ۔

مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

ا لا^2 + ب ما^2 = ۱

تفرق کرنے سے ا لا + ب ما ما$_1$ = ۰

دوبارہ تفرق کرنے سے ا + ب (ما$_1^2$ + ما ما$_2$) = ۰

جس سے لا (ما$_1^2$ + ما ما$_2$) − ما ما$_1$ = ۰

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے ۔

۵ ۔ عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا ۔

بالعموم اوپر کا عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل التکمل کی طرح چند معیاری صورتوں سے کام لئے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے ۔

تاہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیاری مستقلات میں ایک ایسا جبریہ ربط معلوم کرنا چاہیے کہ ان مستقلات کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے ۔ ایسا جبریہ ربط مساوات کا عام حل خیال کیا جاتا ہے ۔

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶ - انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں

صورت اول - متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رقمیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رقمیں دوسری طرف لائی جا سکیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱ - مثلاً اگر قط ما = قط لا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

تو جم لا فر لا = جم ما فر ما

تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + ار

حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل ار شامل ہے۔

مثال ۲ - اگر $\frac{\text{لا}^2 + 1}{\text{ما} + 1}$ = لا ما $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

تو (لا + $\frac{1}{\text{لا}}$) فر لا = (ما^2 + ما) فر ما

اس لئے $\frac{\text{لا}^2}{2}$ + لوک لا = $\frac{\text{ما}^3}{3}$ + $\frac{\text{ما}^2}{2}$ + ار

جس میں ایک اختیاری مستقل ار شامل ہے۔

اسئلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

۱ - لا جم^2 ما فر لا = ما جم^2 لا فر ما

٢ - $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^2 + \text{لا} + ١}{\text{ما}^2 + \text{ما} + ١}$ ٣ - $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}^2 + \text{ما} + ١}{\text{لا}^2 + \text{لا} + ١} = ٠$

۴ - ثابت کرو کہ مثال ٣ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ٢ کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۵ - $\text{لا ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{١ + \text{ما}^2}{١ + \text{لا}^2} (١ + \text{لا} + \text{لا}^2)$

٦ - $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا} - \text{ما}} + \text{لا}^2 \text{و}^{-\text{ما}}$

۷ - ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸ - ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کا مماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عہ) بنائے صرف اس جماعت

$\text{ر} = \text{ا و}^{\text{ط م عہ}}$ سے متعلق ہو سکتا ہے۔

۹ - اُن منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(١) کارٹیزی زیر مماس مستقل ہو

(٢) کارٹیزی زیر عماد مستقل ہو

(٣) قطبی زیر مماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

١٠ - اُس منحنی کی کارٹیزی مساوات معلوم کرو جس کے مماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم - خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$$\text{ما}_{\text{ن}} + \text{ف ما}_{\text{ن}-١} + \text{ق ما}_{\text{ن}-٢} + \ldots + \text{ک ما} = \text{ر}$$

جہاں ف، ق ...... ک، متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقداریں ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے ہیں اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

$$\text{ما}' + \text{ف ما} = \text{ق}$$

اگر اس کے دونوں جانب $و^{\int \text{ف فرلا}}$ سے ضرب دیدیا جائے تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\left(\text{ما } و^{\int \text{ف فرلا}}\right) = \text{ق } و^{\int \text{ف فرلا}}$$

$$\text{پس ما } و^{\int \text{ف فرلا}} = \int \text{ق } و^{\int \text{ف فرلا}} \text{ فرلا} + \text{ر}$$

یہ لا، ما کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی $و^{\int \text{ف فرلا}}$ کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے "متکمل جزوِ ضربی" کہتے ہیں۔

مثال ۱۔ ما' + لا ما = لا کو متکمل کرو۔

متکمل جزوِ ضربی یہاں $و^{\int \text{لا فرلا}}$ یا $و^{\frac{\text{لا}^2}{2}}$ ہے اور اس لئے مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}\left(\text{ما } و^{\frac{\text{لا}^2}{2}}\right) = \text{لا } و^{\frac{\text{لا}^2}{2}}$$

$$\text{یا ما } و^{\frac{\text{لا}^2}{2}} = و^{\frac{\text{لا}^2}{2}} + \text{ر}$$

یعنی $\text{ما} = ۱ + \text{ا}\, \text{و}^{-\frac{\text{لا}^۲}{۲}}$

مثال ۲ - $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۱}{\text{لا}}\, \text{ما} = \text{لا}^۲$ کو مکمل کرو۔

اس جگہ مکمل جزو ضربی $\text{و}^{\int \frac{۱}{\text{لا}} \text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لوک لا}} = \text{لا}$ ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جا سکتی ہے $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{لا ما}) = \text{لا}^۳$

اور $\text{لا ما} = \frac{\text{لا}^۴}{۴} + \text{ا}$ یا $\text{ما} = \frac{\text{لا}^۳}{۴} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$

۸- ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق}$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جا سکتی ہیں۔
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما} = \text{ق ما}^{\text{ن}}$$

یا $\text{ما}^{-\text{ن}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ف ما}^{-\text{ن}+۱} = \text{ق}$

رکھو $\text{ما}^{۱-\text{ن}} = \text{ی}$

تو $\text{ما}^{-\text{ن}}\, \text{فرما} = \frac{\text{فری}}{۱-\text{ن}}$

یا $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + (۱-\text{ن})\, \text{ف ی} = \text{ق}\, (۱-\text{ن})$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

ی و^(۱-ن) ∫ف ورلا = (۱-ن) ∫ ق و^(۱-ن) ∫ف ورلا ورلا + ا

یعنی ما^(۱-ن) و^(۱-ن) ∫ف ورلا = (۱-ن) ∫ ق و^(۱-ن) ∫ف ورلا ورلا + ا

مثال ۱۔ ورما/ورلا + ما/لا = ما^۲ کو تکمل کرو

یہاں ما^-۲ ورما/ورلا + ما^-۱/لا = ۱

یا ۱/ما = ی رکھنے سے

وری/ورلا − ی/لا = −۱

اور چونکہ متکمل جزوِ ضربی و^(−∫ ۱/لا ورلا) = و^(−لوک لا) = ۱/لا ہے

اس لئے ور/ورلا (ی/لا) = − ۱/لا

یعنی ی/لا = −لوک لا + ا

یعنی ۱/ما = ا لا − لا لوک لا

مثال ۲۔ مساوات ورما/ورلا + لا جب ۲ما = لا^۳ جم^۲ ما کو تکمل کرو

جم^۲ ما پر تقسیم کرنے سے

قط^۲ ما ورما/ورلا + ۲ لا مس ما = لا^۳

رکھو مس ما = ی

تب $\frac{\text{وری}}{\text{ورلا}} + ۲\text{لا ی} = \text{لا}^{۳}$

تکمل جزوِ ضربی $\text{و}^{\text{ک} ۲ \text{لا ورلا}}$ ہے اس لئے

$$\text{ی و}^{\text{لا}^{۲}} = \text{ک لا}^{۳}\text{و}^{\text{لا}^{۲}}\text{ورلا} + \text{ار}$$

فرض کرو کہ $\text{لا}^{۲} = \text{سہ}$

تب $۲\text{لا ورلا} = \text{ورسہ}$

پس $\text{ک لا}^{۳}\text{و}^{\text{لا}^{۲}}\text{ورلا} = \frac{۱}{۲}\text{ک سہ و}^{\text{سہ}}\text{ورسہ}$

$$= \frac{۱}{۲}\text{و}^{\text{سہ}}(\text{سہ} - ۱)$$

پس $\text{مس ما} \times \text{و}^{\text{لا}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\text{و}^{\text{لا}^{۲}}(\text{لا}^{۲} - ۱) + \text{ار}$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو

۱۔ $(۱+\text{لا}^{۲})\frac{\text{ورما}}{\text{ورلا}} + \text{ما} = \text{و}^{\text{مس}^{-۱}\text{لا}}$ ۲۔ $\frac{\text{ورما}}{\text{ورلا}} + \text{ارما} = \text{جب ب لا}$

۳۔ $\frac{\text{ورر}}{\text{ورطہ}} + \frac{\text{ر}}{\text{طہ}} = \text{ار طہ}^{\text{ن}}$ ۴۔ $\frac{\text{ورلا}}{\text{ورما}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ما}^{۲}$

۵۔ $(۱+\text{ما}^{۲}) + (\text{لا} - \text{و}^{\text{یس}^{-۱}\text{ما}})\frac{\text{ورما}}{\text{ورلا}} = ۰$ ۶۔ $\left(\frac{\text{و}^{-۲\sqrt{\text{لا}}}}{\sqrt{\text{لا}}} - \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{لا}}}\right)\frac{\text{ورلا}}{\text{ورما}} = ۱$

۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر تکمل جزوِ ضربی $\text{و}^{\text{ک}}$ ف فرلا کے حاصل کرنے میں قوت نما کے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹیزی زیرِ عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔

ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو

۹۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ما}^{2}}{\text{لا}^{2}}$ ۱۰۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ما}^{\text{ن}}}{\text{لا}^{\text{ن}}}$

۱۱۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{لا ما} = \text{لا ما}^{\text{ن}}$

۱۲۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{لا}}\,\text{مس ما} = \frac{1}{\text{لا}^{2}}\,\text{مس ما جب ما}$ [رکھو ما = جب ای]

۱۳۔ $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ی}}{\text{لا}}\,\text{لوک ی} = \frac{\text{ی}}{\text{لا}^{2}}\,(\text{لوک ی})^{2}$ [رکھو ی = $\text{و}^{\text{ما}}$]

۱۴۔ $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{لا} = \text{لا و}^{(\text{ن}-1)\text{ی}}$ [رکھو ی = لوک ما]

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیرِ مماس کے متکافیوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیرِ عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی ن ویں قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات $\text{لا}^{2} - \text{ع}^{2} = \frac{\text{ع}}{\text{ک}} + \frac{1}{2\text{ک}} + 1\,\text{و}^{2\text{ک ع}}$

ہے جہاں ک ایک معلومہ اور ا اختیاری مستقل ہے۔

۱۸- ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

(۱) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{لا}} = \frac{\text{و}^{\text{ما}}}{\text{لا}^{۲}}$ (۲) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ا} = \text{وَ}^{-\text{ما}}\ \text{جب لا}$

(۳) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \frac{\text{مس ما}}{۱ + \text{لا}} = (۱ + \text{لا})\ \text{و}^{\text{لا}}\ \text{قط ما}$

(۴) $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \frac{\text{ف (ما)}}{\text{فَ (ما)}}\ \text{فَہ (لا)} = \frac{\text{فہ (لا) فَہ (لا)}}{\text{فَ (ما)}}$



باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (مسلسل)

متجانس مساواتیں ۔ ایک حرف غائب

کلیرو کی صورت

۹ـ صورت سوم ـ متجانس مساواتیں ـ
جو مساواتیں لا، ما میں متجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جا سکتی ہیں

لا^ن ف (ما/لا ، فرما/فرلا) = ۰

(ا) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو فرما/فرلا کے لئے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

فرما/فرلا = فہ (ما/لا)

اس میں رکھو ما = و لا

تو حاصل ہوگا و + لا فرو/فرلا = فہ (و)

یا فرو/(فہ (و) ـ و) = فرلا/لا

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی

تحت میں آجاتا ہے۔

پس لوگ ر لا = ∫ فرو / (فہ (و) − و)

(ب) لیکن اگر فرما/فرلا کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو ما کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح فرما/فرلا کے لئے ع رکھنے سے

ما = لا فہ (ع) .... (۱)

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

ع = فہ (ع) + لا فہَ (ع) فرع/فرلا

یا فرلا/لا = فہَ (ع) فرع / (ع − فہ (ع))

اس مساوات کو تکمل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں

یعنی ر لا = ف (ع) فرض کرو .... (۲)

ع کو ان مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ (لا² + ما²) فرما/فرلا = لا ما

یہاں فرما/فرلا = لا ما / (لا² + ما²)

اور ما = و لا رکھنے سے

لا فرو/فرلا + و = و / (۱ + و²)

یا $\text{لا}\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{و}^{۳}}{۱+\text{و}^{۲}}$

∴ $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = -\left(\frac{۱}{\text{و}^{۳}} + \frac{۱}{\text{و}}\right)\text{فرو}$

یا $\text{لوک ر لا} = \frac{۱}{۲\text{و}^{۲}} - \text{لوک و}$

یا $\text{ر ما} = \text{و}^{\frac{\text{لا}^{۲}}{۲\text{ما}^{۲}}}$

مثال ۲ — فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}$

یعنی $\text{ما} = \text{لا}(\text{ع} + \text{ع}^{۲})$

تب $\text{ع} = (\text{ع}+\text{ع}^{۲}) + \text{لا}(۱+۲\text{ع})\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$

یا $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} + \left(\frac{۱}{\text{ع}^{۲}} + \frac{۲}{\text{ع}}\right)\text{فرع} = ۰$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{لوک ر لا} + ۲\,\text{لوک ع} - \frac{۱}{\text{ع}} = ۰$

یعنی $\text{ر لا ع}^{۲} = \text{و}^{\frac{۱}{\text{ع}}}$

اور
$$\begin{cases} \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{ع} + \text{ع}^{۲} \\ \text{ر لا ع}^{۲} = \text{و}^{\frac{۱}{\text{ع}}} \end{cases}$$

کا ع حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

یہ حاصل اسقاط ہے $\text{لوک}\left\{\frac{\text{ر لا}}{۴}\left(-۱ \pm \sqrt{\frac{۴\text{ما}+\text{لا}}{\text{لا}}}\right)^{۲}\right\} = \frac{\text{لا}}{۲\text{ما}}\left\{۱ \pm \sqrt{\frac{۴\text{ما}+\text{لا}}{\text{لا}}}\right\}$

لیکن اگر جبریہ طریق پر ع کو ساقط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر ساقط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع والی ان مساواتو

کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا ع، حاصل استفادہ تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

۱- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$ ۲- $(۳\text{لا} + ۴\text{ما}) = (۵\text{لا} + ۶\text{ما}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

۳- $\text{لا}^{۲} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ما}^{۲}$ ۴- $\text{ما} = \text{لا} \left[\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^{۳} \right]$

۵- $\text{ما} = \text{لا} \left\{ \text{ا} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^{۲} + \text{ب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ج} \right\}$

۱۰- خاص صورت

مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{الا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\text{اَلا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}}$ بآسانی متجانس شکل میں اس طرح لائی جاسکتی ہے

اس میں رکھو $\left. \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ضا} + \text{ھ} \\ \text{ما} = \text{عا} + \text{ک} \end{array} \right\}$ جہاں ضا، عا متغیر ہیں اور ھ، ک مستقل۔

تب $\frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{\text{اضا} + \text{ب عا} + (\text{اھ} + \text{ب ک} + \text{ج})}{\text{اَضا} + \text{بَ عا} + (\text{اَھ} + \text{بَ ک} + \text{جَ})}$

اب ھ، ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ $\begin{array}{l} \text{اھ} + \text{ب ک} + \text{ج} = ۰ \\ \text{اَھ} + \text{بَ ک} + \text{جَ} = ۰ \end{array}$

پس $\frac{\text{ھ}}{\text{ب جَ} - \text{بَ ج}} = \frac{\text{ک}}{\text{ج اَ} - \text{جَ ا}} = \frac{۱}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$

تب $$\frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{\text{ا ضا} + \text{ب عا}}{\text{اَ ضا} + \text{بَ عا}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں $\text{عا} = \text{و ضا}$ اور متغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔

۱۱- لیکن ایک صورت میں ہے، کہ اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

یعنی جبکہ $$\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \neq \frac{\text{ج}}{\text{جَ}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ $\frac{\text{اَ}}{\text{ا}} = \text{م}$ اور $\text{ا لا} + \text{ب ما} = \text{عا}$

تب $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ب}}\left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - \text{ا}\right)$$

پس $$\left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - \text{ا}\right) = \text{ب}\,\frac{\text{عا} + \text{ج}}{\text{م عا} + \text{جَ}}$$

یا $$\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ا م} + \text{ب})\,\text{عا} + \text{ا جَ} + \text{ب ج}}{\text{م عا} + \text{جَ}}$$

اور $$\text{فرلا} = \frac{\text{م عا} + \text{جَ}}{(\text{ا م} + \text{ب})\,\text{عا} + \text{ا جَ} + \text{ب ج}}\ \text{فرعا}$$

متغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا تکمل عمل میں آ سکتا ہے۔

۱۲- ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{-\text{ب لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}}$$

جہاں شمار کنندہ میں ما کا سر نسب نما میں لا کے سر کے مساوی اور مختلف العلامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$(\text{ا لا} + \text{ج})\,\text{فرلا} + \text{ب}\,(\text{ما فرلا} + \text{لا فرما}) = (\text{بَ ما} + \text{جَ})\,\text{فرما}$$

جو ایک "ٹھیک یا حاضر" تفرقی مساوات ہے، اس کا تکمل ہے

$$\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ج}\,\text{لا} + 2\,\text{ب}\,\text{لا}\,\text{ما} = \text{بَ}\,\text{ما}^2 + 2\,\text{جَ}\,\text{ما} + \text{مم}$$

جہاں مم اختیاری مستقل ہے۔

مثال ۱۔ تکمل کرو $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \dfrac{2\text{لا} + 3\text{ما} - 8}{\text{لا} + \text{ما} - 3}$ کو۔

رکھو $\text{لا} = \text{ضا} + \text{ھ}$، $\text{ما} = \text{عا} + \text{ک}$

پس $$\frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{2\text{ضا} + 3\text{عا} + (2\text{ھ} + 3\text{ک} - 8)}{\text{ضا} + \text{عا} + (\text{ھ} + \text{ک} - 3)}$$

ھ اور ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$$\left.\begin{array}{l} 2\text{ھ} + 3\text{ک} - 8 = 0 \\ \text{ھ} + \text{ک} - 3 = 0 \end{array}\right\}$$ یعنی $\text{ھ} = 1$، $\text{ک} = 2$

تب $$\frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{2\text{ضا} + 3\text{عا}}{\text{ضا} + \text{عا}} \quad \text{———} \quad (1)$$

اب رکھو $\text{عا} = \text{و}\,\text{ضا}$، تب

$$\text{و} + \text{ضا}\frac{\text{فرو}}{\text{فرضا}} = \frac{2 + 3\text{و}}{1 + \text{و}}$$

$$\therefore\ \text{ضا}\frac{\text{فرو}}{\text{فرضا}} = \frac{2 + 3\text{و}}{1 + \text{و}} - \text{و} = -\frac{\text{و}^2 - 2\text{و} - 2}{1 + \text{و}}$$

$$\therefore\ -\frac{\text{فرضا}}{\text{ضا}} = \frac{\text{و} + 1}{(\text{و} - 1)^2 - 3}\,\text{فرو}$$

$$= \left[\frac{\text{و} - 1}{(\text{و} - 1)^2 - 3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\text{و} - 1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{\text{و} - 1 + \sqrt{3}}\right)\right]\text{فرو}$$

$$\therefore\ -\text{لوک}\,\text{ضا} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\left\{(\text{و} - 1)^2 - 3\right\} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{و} - 1 - \sqrt{3}}{\text{و} - 1 + \sqrt{3}} + \text{ا}$$

جہاں $\text{ضا} = \text{لا} - 1$ اور $\text{و} = \dfrac{\text{ما} - 2}{\text{لا} - 1}$

مثال ۲- تکمل کرو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا + ما}}{\text{لا + ما - ۱}}$ کو

فرض کرو کہ لا + ما = ی، تب

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{۱} + \frac{\text{ی}}{\text{ی - ۱}} = \frac{\text{۲ی - ۱}}{\text{ی - ۱}}$$

اور $\text{فرلا} = \frac{\text{ی - ۱}}{\text{۲ی - ۱}}\ \text{فری} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left[\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۲ی - ۱}}\right] \text{فری}$

$\therefore\ \text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\ \text{ی} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\ \text{لوک (۲ی - ۱) + ا}$

جہاں ی = لا + ما

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو۔

۱- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۲لا + ۳ما}}{\text{۳لا + ۲ما}}$ ۲- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا + ۲ما - ۳}}{\text{۲لا + ما - ۳}}$

۳- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۲لا + ما - ۲}}{\text{۴لا + ما - ۳}}$ ۴- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{الا + ب ما - ا}}{\text{ب لا + ا ما - ب}}$

۵- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا + ما + ۱}}{\text{لا + ما - ۱}}$ ۶- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا + ما + ۱}}{\text{۲لا + ۲ما + ۱}}$

۷- $\text{(۲لا + ۳ما - ۵)}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۳لا + ۲ما - ۵ = ۰}$

۸- $\text{(۲لا + ۳ما - ۵)}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۲لا + ۳ما - ۱ = ۰}$

۹- ثابت کرو کہ ایک ذرہ لا، ما جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{الا + ہ ما + گ}$$

$$\frac{\text{د}\,\text{لا}}{\text{د}\,\text{ت}} = -(\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ف})$$

ہمیشہ ایک مخروطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات، $\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}, \frac{\text{د}\,\text{ما}}{\text{د}\,\text{لا}}\right) = 0$ کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ $\text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}, \frac{\text{د}\,\text{ما}}{\text{د}\,\text{لا}}\right) = 0$ کے حل لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ ا، ب کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائلِ ذیل میں سے کون کون سے متشابہ جٹوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

(۱) $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا}\,\text{لا}$ (۲) $\text{ما} = \text{ا}\ \text{جمز}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

(۳) $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ (۴) $\text{ما} = 2\,\text{ا}^3\ \text{لوک}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}^3}$

(۵) $\text{ب}\ \text{سس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{ا} + \text{ما}$ (۶) $\text{لا}^3 + \text{ما}^3 = 3\,\text{ا}\,\text{لا}\,\text{ما}$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت

ہیں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف\left(ما،\ \frac{فرما}{فرلا}\right)=۰$$

اسے ہم $\frac{فرما}{فرلا}$ یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فرما}{فرلا}=فہ\ (ما)$$

تب $$فرلا=\frac{فرما}{فہ(ما)}$$

اور تکملی ہے $$لا=\int\frac{فرما}{فہ(ما)}+ا$$

(۲) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما=فہ(ع) جہاں ع تفرقی سر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بلحاظ لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع=فہَ\ (ع)\ \frac{فرع}{فرلا}$$

یعنی $$فرلا=\frac{فہَ(ع)}{ع}\ فرع$$

پس $$لا=\int\frac{فہَ(ع)}{ع}\ فرع+ا$$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم ع کو اس مساوات اور ما = فہ (ذ ع) سے ساقط کرتے ہیں، اسطرح مساوات مفروضہ کا حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں ما موجود نہیں ہے، اس صورت میں اس کی شکل ہوگی $\text{ف}\left(\text{لا}،\ \frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right) = ۰$

چونکہ $\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} = \frac{۱}{\frac{\text{و لا}}{\text{و ما}}}$ اسلئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی جا سکتی ہے $\text{سا}\left(\text{لا}،\ \frac{\text{و لا}}{\text{و ما}}\right) = ۰$

پس اگر ما کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح۔

(۱) بشرط سہولت $\frac{\text{و لا}}{\text{و ما}}$ کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{و لا}}{\text{و ما}} = \text{فہ}\,(\text{لا})$$

تب $$\text{و ما} = \frac{\text{و لا}}{\text{فہ}\,(\text{لا})}$$

اور تکملی ہے $$\text{ما} = \int \frac{\text{و لا}}{\text{فہ}\,(\text{لا})} + \text{د}$$

(۲) لیکن اگر $\frac{\text{و لا}}{\text{و ما}}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں لا = فہ(ق) جہاں ق، $\frac{\text{ور لا}}{\text{ور ما}}$ کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$\text{ق} = \text{فہَ}\,(\text{ق})\,\frac{\text{ور ق}}{\text{ور ما}}$$

اس طرح $\text{ور ما} = \frac{\text{فہَ}(\text{ق})}{\text{ق}}\,\text{ور ق}$

اور $\text{ما} = \int \frac{\text{فہَ}(\text{ق})}{\text{ق}}\,\text{ور ق} + \text{ا}$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں ق کو اس مساوات اور لا = فہ(ق) سے ساقط کرنا چاہئے؛ اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ لا موجود نہ ہو یا ما، ہم حتی الامکان سب سے پہلے $\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}}$ کے لئے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ مساوات $\text{۱} + \text{لا}^{۲} - \text{لا}\,\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}} = ۰$ کو تکمل کرو

اسجگہ $\frac{\text{ور لا}}{\text{ور ما}} = \frac{\text{لا}}{\text{۱} + \text{لا}^{۲}}$ یعنی $\text{ور ما} = \left(\text{لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\right)\text{ور لا}$

اور ما = لا²/۲ + لوک لا + ا حل مطلوب ہے

مثال ۲ - حل کرو لا (وما/ولا) = ۱ + (وما/ولا)² کو۔

مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

لا = ق + ۱/ق جہاں ق = ولا/وما

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

ق = (۱ − ۱/ق²) وق/وما

یا وما/وق = ۱/ق − ۱/ق³

اور ما = لوک ق + ۱/(۲ق²) + ا

اس مساوات اور مساوات لا = ق + ۱/ق کا ق، حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۱- وما/ولا = ما + ۱/ما ۲- وما/ولا = لا + ۱/لا

۳- √(ا + لا) وما/ولا + لا = ۰

۴- (۲ا لا + لا²) وما/ولا = ا² + ۲ا لا

۵- $(۲\,ا\,ما + ما^{۲})\,\frac{و\,ما}{و\,لا} = ا^{۲} + ۲\,ا\,ما$

۶- $ما = جب\left(\frac{و\,ما}{و\,لا}\right) - \frac{و\,ما}{و\,لا}\;جم\left(\frac{و\,ما}{و\,لا}\right)$

۷- $ما = ا\left(\frac{و\,ما}{و\,لا}\right)^{۳} + ب\left(\frac{و\,ما}{و\,لا}\right)^{۲}$

۸- $لا\left(\frac{و\,ما}{و\,لا}\right)^{۳} = ا + ب\,\frac{و\,ما}{و\,لا}$

۱۵- صورت پنجم - کلیروی صورت $ما = لا\,\frac{و\,ما}{و\,لا} + ف\left(\frac{و\,ما}{و\,لا}\right)$

$\frac{و\,ما}{و\,لا}$ کے لئے ع لکھنے سے

$ما = ع\,لا + ف\,(ع)$ .... (۱)

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$ع = ع + لا\,\frac{و\,ع}{و\,لا} + فَ\,(ع)\,\frac{و\,ع}{و\,لا}$

یا $\left\{لا + فَ\,(ع)\right\}\frac{و\,ع}{و\,لا} = ۰$ .... (۲)

جس سے $\frac{و\,ع}{و\,لا} = ۰$ یا $لا + فَ\,(ع) = ۰$

اب $\frac{و\,ع}{و\,لا} = ۰$ سے حاصل ہوتا ہے $ع = ج$ جہاں ج مستقل ہے
پس $ما = ج\,لا + ف\,(ج)$ تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔
نیز اگر ع کو مساوات

لا + فَ (ع) = ۰ .... (۳)

سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع، لا کا ایک تفاعل ہوگا اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱) اور (۳) سے ساقط کیا جائے تو ہمیں لا، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی مساوات کو پورا کرے گا۔

اب ع کو مساواتوں

ما = ع لا + ف (ع)

۰ = لا + فَ (ع)

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

ما = ج لا + ف (ج)

۰ = لا + فَ (ج)

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط ما = ج لا + ف (ج) کا لفاف معلوم کیا جائے۔

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔

(۱) خطی حل جسے "مکمل ابتدائی" کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لفاف یا "نادر حل" جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل نہیں ہوتا اور نیز یہ حل مکمل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے لفاف کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ کرے۔

مثال - حل کرو $\text{ما} = \text{ع}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{ع}}$

کلیروی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$$

لفافی یا نادر حل اوپر کی مساوات اور

$$0 = \text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{م}^2}$$

کے درمیان م کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

نادر حل ہے $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ نادر حل $\text{ما}^2 = ۴\,\text{ا}\,\text{لا}$ مکافی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{م}}$ مکافی کے مماس کی مساوات ہے ۔

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لفافی حل معلوم کرو

۱- $\text{ما} = \text{ع}\,\text{لا} + \text{ع}^2$ ۲- $\text{ما} = \text{ع}\,\text{لا} + \text{ع}^3$

۳- $\text{ما} = \text{ع}\,\text{لا} + \text{ع}^{\text{ن}}$ ۴- $\text{ما} = \text{ع}\,\text{لا} + \sqrt{\text{ا}^2\,\text{ع}^2 + \text{ب}^2}$

۵- $\text{ما} = (\text{لا} - \text{ا})\,\text{ع} - \text{ع}^2$ ۶- $(\text{ما} - \text{ع}\,\text{لا})(\text{ع} - ۱) = \text{ع}$

۱۶- مساوات $\text{ما} = \text{لا}\,\text{ف}(\text{ع}) + \text{سا}(\text{ع})$ .... (۱)
بھی پہلے بلحاظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال کرنے سے حل ہو سکتی ہے ۔

تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فہ}(\text{ع}) + \text{لا}\ \text{فہ}'(\text{ع})\frac{\text{ور ع}}{\text{ور لا}} + \text{سا}'(\text{ع})\frac{\text{ور ع}}{\text{ور لا}}$$

جس سے

$$\frac{\text{ور لا}}{\text{ور ع}} + \text{لا}\frac{\text{فہ}'(\text{ع})}{\text{فہ}(\text{ع}) - \text{ع}} = -\frac{\text{سا}'(\text{ع})}{\text{فہ}(\text{ع}) - \text{ع}}$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$\text{لا}\ \text{و}^{\int \frac{\text{فہ}'(\text{ع})\text{ورع}}{\text{فہ}(\text{ع})-\text{ع}}} = -\int \frac{\text{سا}'(\text{ع})}{\text{فہ}(\text{ع})-\text{ع}}\ \text{و}^{\int \frac{\text{فہ}'(\text{ع})\text{ورع}}{\text{فہ}(\text{ع})-\text{ع}}}\ \text{ورع} + \text{ا} \quad .....(۲)$$

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

مثال۔ حل کرو $\text{ما} = ۲\ \text{ع}\ \text{لا} + \text{ع}^۲ \quad .....(۱)$

تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = ۲\ \text{ع} + ۲\ \text{لا}\frac{\text{ورع}}{\text{ورلا}} + ۲\ \text{ع}\frac{\text{ورع}}{\text{ورلا}}$$

$$\text{یا}\quad \text{ع}\frac{\text{ورلا}}{\text{ورع}} + ۲\ \text{لا} = -۲\ \text{ع}$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{\text{ور}}{\text{ورع}}(\text{ع}^۲\ \text{لا}) = -۲\ \text{ع}^۲$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ع}^۲\ \text{لا} = -\frac{۲}{۳}\text{ع}^۳ - \text{ا} \quad .....(۲)$

اِن مساواتوں کا ع، حاصل اسقاط اس طرح حاصل ہوسکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کرو پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

مساوات (۲) سے $۲\ \text{ع}^۳ + ۳\ \text{ع}^۲\ \text{لا} + ۳\ \text{ا} = ۰$

(۱) سے $\text{ع}^۳ + ۲\ \text{ع}^۲\ \text{لا} - \text{ع}\ \text{ما} = ۰$

اس لئے $\text{ع}^۲\ \text{لا} - ۲\ \text{ع}\ \text{ما} - ۳\ \text{ا} = ۰$

اس مساوات اور $\text{ع}^۲ + ۲\ \text{ع}\ \text{لا} - \text{ما} = ۰$ سے چلیپی ضرب سے

ذریعہ

$$\frac{\text{ع}^2}{\text{۲ما}^2 + \text{۶ا لا}} = \frac{\text{ع}}{\text{لا ما} - \text{۳ا}} = \frac{1}{\text{۲لا}^2 + \text{۲ما}}$$

جس سے حاصل اسقاط ہے $\text{۴}(\text{ما}^2 + \text{۳ا لا})(\text{لا}^2 + \text{ما}) = (\text{لا ما} - \text{۳ا})^2$

۱۷- ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں اسقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع، حاصل اسقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۱- $\text{ما} = \text{ع}^2\,\text{لا} + \text{ع}$ ۲- $\text{ما} = \text{ا لا ع} + \text{ع}^2$

۳- $\text{ما} = \text{ع}^2\,\text{لا} + \text{ع}^3$ ۴- $\text{ما} = (\text{ع} + \text{ع}^2)\,\text{لا} + \frac{1}{\text{ع}}$

۵- $\text{ما} = (\text{ع} + \text{ع}^{\text{ن}})\,\text{لا} + \frac{1}{\text{ع}^{\text{ن}-1}}$ ۶- $\text{ما} = \text{۲ع لا} + \text{ع}^{\text{ن}}$

۷- $\text{ما} = \text{ا ع لا} + \text{ب ع}^3$

۸- ایک منحنی کے نقطہ ن پر کا مماس محور و ما سے ت پر ملتا ہے اور و ت^2 اُس زاویۂ میلان کے مماس کے متناسب ہے جو ن ت کا و لا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ ۱۸۸۸ء]

۹- جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر اُن کے مماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے اُن کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے مماس کی مساوات اور نادرہ حل سے منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو مماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے مستقل ہو۔

۱۱۔ جن منحنیات میں مماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر حل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات $\text{ما}=\text{ع}^{2}(\text{لا}-\text{ع})$ کو پورا کرتا ہے، نیز اگر $\text{لا}=\frac{1}{2}$ تو $\text{ع}=0$۔ منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۹۹ء]

۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو

$$\text{و}^{3\text{لا}}\left(\text{ما}-\frac{\text{دما}}{\text{دلا}}\right)=\text{ج}\left\{\text{و}^{2\text{لا}}+\left(\frac{\text{دما}}{\text{دلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{3}{2}}$$ [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $\text{لا}^{2}=\text{س}$ اور $\text{ما}^{2}=\text{ت}$ تو مساوات ذیل

$$\text{ا لا ما م}'^{2}+(\text{لا}^{2}-\text{ا ما}^{2}-\text{ب})\,\text{م}'-\text{لا ما}=0$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔
اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔



باب سوم

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

ٹھیک یا حاضر تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات

اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کرینگے

$$\text{فہ}\,(\text{لا}\,،\,\text{ما}\,،\,\text{ما}_1\,،\,\text{ما}_2) = 0$$

اِس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی $$\frac{\text{و}^2\,\text{ما}}{\text{و}\,\text{لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{و}\,\text{ما}}{\text{و}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}$$

جہاں ف، ق، ر متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کر کے مساوات

$$\frac{\text{و}^2\,\text{ما}}{\text{و}\,\text{لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{و}\,\text{ما}}{\text{و}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ما} = 0$$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{فہ}\,(\text{لا})$ اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو

$$\text{ما} = \text{ی}\,\text{فہ}\,(\text{لا})$$

$$\text{ما}_1 = \text{ی}_1\,\text{فہ}\,(\text{لا}) + \text{ی}\,\text{فہ}'\,(\text{لا})$$

ما$_{۲}$ = ی$_{۲}$ فہ (لا) + ۲ ی$_{۱}$ فہَ (لا) + ی فہً (لا)

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

ی$_{۲}$ فہ (لا) + ۲ ی$_{۱}$ فہَ (لا) + ی فہً (لا)
+ ف ی$_{۱}$ فہ (لا) + ف ی فہَ (لا)
+ ق ی فہ (لا) = ر

لیکن فہً (لا) + ف فہَ (لا) + ق فہ (لا) = ۰ حسب مفروض

اِس لئے ی$_{۲}$ + { ۲ فہَ (لا) / فہ (لا) + ف } ی$_{۱}$ = ر / فہ (لا)

جو ی$_{۱}$ کے لئے خطی مساوات ہے

متکمل جزو ضربی ہے

و$^{\int \{ف + ۲ \frac{فہَ(لا)}{فہ(لا)}\} ولا}$ یا [فہ (لا)]^{۲} و$^{\int ف ولا}$

اور پہلا تکملی ہے

ی$_{۱}$ {فہ (لا)}^{۲} و$^{\int ف ولا}$ = ∫ ر {فہ (لا)} و$^{\int ف ولا}$ ولا + ا$_{۱}$

جس سے دوسرا تکملی اور اس لئے تفرقی مساوات کا حل حاصل ہو سکتا ہے

مثال—اس مساوات کو حل کرو و^{۲}ما / ولا^{۲} + لا^{۳} وما / ولا − لا^{۲} ما = لا^{۲} و$^{-لا^{۴}/۴}$

یہاں ما = لا مساوات و^{۲}ما / ولا^{۲} + لا^{۳} وما / ولا − لا^{۲} ما = ۰ کا ایک حل ہے

اس لئے رکھو ما = لا ی

تب ما$_{۱}$ = لا ی$_{۱}$ + ی

اور ما$_{۲}$ = لا ی$_{۲}$ + ۲ ی$_{۱}$

اس لئے لا ی$_{۲}$ + ۲ ی$_{۱}$ + لا^{۳} (لا ی$_{۱}$ + ی) − لا^{۲} (لا ی) = لا^{۲} و$^{-لا^{۴}/۴}$

$$ی'_۱ + \left(\frac{۲}{لا} + لا^۳\right) ی_۱ = لا^۲ و^{-\frac{لا^۴}{۴}}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے $و^{\int\left(\frac{۲}{لا} + لا^۳\right) فرلا}$ یا $لا^۲ و^{\frac{لا^۴}{۴}}$

پس $\frac{فر}{فرلا}\left(ی_۱ لا^۲ و^{\frac{لا^۴}{۴}}\right) = لا^۴$

اور $ی_۱ لا^۲ و^{\frac{لا^۴}{۴}} = \frac{لا^۵}{۵} + ا$

یعنی $ی_۱ = \frac{۱}{۵} لا^۳ و^{-\frac{لا^۴}{۴}} + \frac{ا}{لا^۲} و^{-\frac{لا^۴}{۴}}$

جس سے $ی = -\frac{۱}{۵} و^{-\frac{لا^۴}{۴}} + ا \int \frac{۱}{لا^۲} و^{-\frac{لا^۴}{۴}} فرلا + ب$

اور حل مطلوب ہے $ما = -\frac{لا}{۵} و^{-\frac{لا^۴}{۴}} + ا لا \int \frac{۱}{لا^۲} و^{-\frac{لا^۴}{۴}} فرلا + ب لا$

۲۰ - صورت دوم - ایک حرف غائب

(ا) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ $ما_۱ = ع$

تب $ما_۲ = \frac{فرع}{فرلا} = ع \frac{فرع}{فرما}$

اس طرح مساوات $فہ (ما، ما_۱، ما_۲) = ۰$ ہو جاتی ہے

$$فہ \left(ما، ع، ع \frac{فرع}{فرما}\right) = ۰$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(ب) اگر ما موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ $ما_۱ = ع$

تب $ما_{۲} = \frac{ؤع}{ؤلا}$

اور $فہ(لا ، ما_{۱} ، ما_{۲}) = ۰$ ہو جاتی ہے

$$فہ\left(لا ، ع ، \frac{ؤع}{ؤلا}\right) = ۰$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱ ـ مساوات $ما\,ما_{۲} + ما_{۱}^{۲} = ۲\,ما^{۲}$ کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو $ما_{۱} = ع$ اور $ما_{۲} = ع \frac{ؤع}{ؤما}$

اسطرح $ما\,ع \frac{ؤع}{ؤما} + ع^{۲} = ۲\,ما^{۲}$

یا $\frac{ؤع^{۲}}{ؤما} + \frac{۲}{ما} ع^{۲} = ۴\,ما$

تنکمل جزو ضربی ہے $و^{\int \frac{۲}{ما} ؤما} = ما^{۲}$

اس لئے $\frac{ؤ}{ؤما}\left(ع^{۲} ما^{۲}\right) = ۴\,ما^{۳}$

یا $ع^{۲} ما^{۲} = ما^{۴} + مستقل = ما^{۴} + ا^{۴}$ (فرض کرو)

اس لئے $\frac{ما\,ؤما}{\sqrt{ما^{۴} + ا^{۴}}} = ؤلا$

یا $\text{جبز}^{-1} \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ر}^{۲}} = ۲\text{لا} + \text{ر}$

یعنی $\text{ما}^{۲} = \text{ر}^{۲}\ \text{جبز}(۲\text{لا} + \text{ر})$

مثال ۲ ۔ حل کرو $۱ + \text{ما}_{۱}^{۲} = \text{لا}\ \text{ما}_{۱}\ \text{ما}_{۲}$ کو

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے، پس رکھو $\text{ما}_{۱} = \text{ع}$

اس طرح $۱ + \text{ع}^{۲} = \text{لا ع} \frac{\text{دع}}{\text{دلا}}$

یا $\frac{\text{دلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{ع دع}}{۱ + \text{ع}^{۲}}$

یعنی $\text{لوک لا} = \text{لوک} \sqrt{۱ + \text{ع}^{۲}} + \text{مستقل}$

$۱ + \text{ع}^{۲} = \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ر}^{۲}}$ (فرض کرو)

یا $\text{ر دما} = \sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ر}^{۲}}\ \text{دلا}$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{ر ما} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{ر}^{۲}}}{۲} - \frac{\text{ر}^{۲}}{۲}\ \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ر}} + \text{ب}$

جہاں ر اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

۱ ۔ $\text{لا ما}_{۲} = ۱$ ۲ ۔ $۱ + \text{ما}_{۱}^{۲} = \text{ما ما}_{۲}$

۳ ۔ $۱ + \text{ما}_{۱}^{۲} = \text{لا}^{۲}\ \text{ما}_{۲}^{۲}$ ۴ ۔ $۹\ \text{ما}_{۲}^{۲} = ۴\ \text{ما}_{۱}$

۵ ۔ $\text{ر ما}_{۲} = (۱ + \text{ما}_{۱}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$ ۶ ۔ $\text{ما}_{۲} + \text{ما}_{۱}^{۲} + \text{ما} = ۰$

۷- $\text{ما}\,\text{ما}_{۲} + \text{ما}_{۱}^{۲} + \text{لا} = ۰$ ۸- $\text{ما}_{۲} + \text{لا}\,\text{ما}_{۱} - \text{ما} = \frac{۱}{\text{لا}}$ و $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$

۹- $\text{ما}\,\text{ما}_{۲} = \text{ما}_{۱}^{۳} - \text{ما}_{۱}$ (آکسفورڈ سنہ ۱۸۸۹)

۱۰- مساوات $(۱-\text{ما}^{۲})\frac{\text{د}^{۲}\text{ما}}{\text{د لا}^{۲}} - \text{ما}\left(\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}}\right)^{۲} = ۲\,\text{ما}^{۳}$ کو حل کرو، معلوم ہے

$\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = ۰$ جبکہ ما = ۰   [آکسفورڈ سنہ ۱۸۹۰]

۱۱- یہ معلوم ہے کہ لا²، ما کی ایک قیمت ہے جو مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$\text{لا}^{۲}(\text{لوک لا}-۱)\frac{\text{د}^{۲}\text{ما}}{\text{د لا}^{۲}} - \text{لا}(۲\,\text{لوک لا}-۱)\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} + ۲\,\text{ما لوک لا} = ۰$$

اس کا پورا حل معلوم کرو   [آئی، سی، ایس سنہ ۱۸۹۴]

۲۱- عام خطی مساوات۔ کسی ایک رقم کا نکال دینا

اب ہم زیادہ عام مساوات

$$\text{ما}_{\text{ن}} + \text{ف}_{۱}\,\text{ما}_{\text{ن}-۱} + \text{ف}_{۲}\,\text{ما}_{\text{ن}-۲} + \dots + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \text{ق}$$

پر غور کرتے ہیں جہاں $\text{ف}_{۱}$، $\text{ف}_{۲}$ ..... ق، لا کے معلومہ تفاعل ہیں

رکھو ما = و ی

تب $\text{ما}_{۱} = \text{و}\,\text{ی}_{۱} + \text{و}_{۱}\,\text{ی}$

$\text{ما}_{۲} = \text{و}\,\text{ی}_{۲} + ۲\,\text{و}_{۱}\,\text{ی}_{۱} + \text{و}_{۲}\,\text{ی}$ وغیرہ

اسی طرح $\text{و}\,\text{ی}_{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{و}_{۱}\,\text{ی}_{\text{ن}-۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\text{و}_{۲}\,\text{ی}_{\text{ن}-۲} + \dots + \text{و}_{\text{ن}}\,\text{ی}$

$+\text{ف}_{۱}\,\text{و}\,\text{ی}_{\text{ن}-۱} + (\text{ن}-۱)\,\text{ف}_{۱}\,\text{و}_{۱}\,\text{ی}_{\text{ن}-۲} + \dots + \text{ف}_{۱}\,\text{و}_{\text{ن}-۱}\,\text{ی}$

+ ف$_{۲}$ و ی$_{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن-۲}$ و ی

....

+ ف$_{ن}$ و ی = ق

ی$_{ن-۱}$ کا سر ن و$_{۱}$ + ف$_{۱}$ و ہے۔

اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

و$_{۱}$ / و = - ف$_{۱}$ و لا / ن یا و = و$^{- ف_{۱} و لا / ن}$

تو جس رقم میں ی$_{ن-۱}$ واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے

اسی طرح اگر و کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات ایک

ن (ن - ۱) / ۲ × ۱ و$_{۲}$ + (ن - ۱) ف$_{۱}$ و$_{۱}$ + ف$_{۲}$ و = ۰

پوری ہو تو وہ رقم جس میں ی$_{ن-۲}$ واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔

ی کا سر ہے

و$_{ن}$ + ف$_{۱}$ و$_{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ و$_{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن}$ و

اگر و کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے جو اوپر کے جملہ کو صفر بنا دے تو ی$_{۱}$ = عا اور اس لئے ی$_{۲}$ = عا$_{۲}$

اور ی$_{ن}$ = عا$_{ن-۱}$ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل ما = و کسی طرح سے معلوم ہو سکے جبکہ اس کا بایاں رکن حذف کیا جائے تو ما = و ی رکھنے سے اور پھر ی$_{۱}$ = عا فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں

۲۲ - صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجۂ دوم کی مساوات

$$\text{ما}_{\text{۲}} + \text{ف}_{\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{۱}} + \text{ف}_{\text{۲}}\,\text{ما} = \text{ق}$$

میں $\text{ما} = \text{و}^{-\frac{1}{2}\int \text{ف}_{\text{۱}}\,\text{فرلا}}$ ہی شدرج کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$\text{ی}_{\text{۲}} + \text{ف}'\,\text{ی} = \text{ق}'$$

میں تحویل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا **عام** حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

"ٹھیک" یا حاضر تفرقی مساوات

۲۳ - اگر $\text{ن} < \text{ق}$ تو $\text{لا}^{\text{ن}}\dfrac{\text{فر}^{\text{ق}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ق}}}$ کامل تفرقی ہے

اور ما خواہ کچھ ہی ہو یہ تکمل ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر $\dfrac{\text{فر}^{\text{ق}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ق}}}$ کو $\text{ما}_{\text{ق}}$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما}_{\text{ق}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۱}} - \text{ن}\int \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۱}}\,\text{فرلا}$$

$$\int \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۱}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۲}} - (\text{ن}-\text{۱})\int \text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۲}}\,\text{فرلا}$$

وغیرہ

$$\int \text{لا}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{ن}+\text{۱}}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{ن}} - \int \text{ما}_{\text{ق}-\text{ن}}\,\text{فرلا} = \text{لا}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{ن}} - \text{ما}_{\text{ق}-\text{ن}-\text{۱}}$$

اس طرح $\int \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما}_{\text{ق}}\,\text{فرلا} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۱}} - \text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۲}} + \text{ن}(\text{ن}-\text{۱})\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{۲}}\,\text{ما}_{\text{ق}-\text{۳}} - \ldots$

ما$_{ق-ن-۱}$ $\lfloor$ن (−۱)^{ن} + ...

ظاہر ہے کہ جب ق = ن یا > ن تو تکمل عمل میں نہیں آسکتا۔

۴۴۔ اوپر کے مسئلہ ابتدائی یا تمہیدیہ کی مدد سے ہم اکثر جلدی دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات معلومہ حاضر مساوات ہے یا نہیں۔ کیونکہ اگر سب سے پہلے تمام رقمیں اس شکل (لا^{ن} ما$_{ق}$) کی جن میں ن > ق الگ کرلی جائیں تو اکثر اوقات فقط دیکھنے ہی سے ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ باقی ماندہ ارقام کامل تفرقی سر نباتی ہیں یا نہیں۔

مثال لا^{۲} ما$_{۴}$ + لا^{۳} ما$_{۴}$ + لا ما$_{۱}$ + ما = جب لا

اس جگہ تمہیدیہ کی بنا پر لا^{۲} ما$_{۴}$ اور لا^{۳} ما$_{۴}$ کامل تفرقی سر ہیں اور ظاہر ہے کہ لا ما$_{۱}$ + ما بھی لا ما کا کامل تفرقی سر ہے، اس لئے اس مساوات کا پہلا تفرقی حسب ذیل ہے۔

لا^{۲} ما$_{۳}$ − ۲لا ما$_{۲}$ + ۲ما$_{۱}$ + لا^{۳} ما$_{۳}$ − ۳لا^{۲} ما$_{۲}$ + ۶لا ما$_{۱}$ − ۶ما + لا ما = −جم لا + ر

۴۵۔ جانچ کا زیادہ عام طریقہ

حاضر تفرقی مساوات کو پرکھنے کا عام طریقہ حسب ذیل ہے جبکہ مساوات عام صورت

ف ما$_{ن}$ + ف$_{۱}$ ما$_{ن-۱}$ + ف$_{۲}$ ما$_{ن-۲}$ + ... + ف$_{ن}$ ما = و

میں دی گئی ہو جہاں ف، ف$_{۱}$، ف$_{۲}$، ... ف$_{ن}$ کسی شکل کے لا کے تفاعل ہیں۔

اگر تفرقیوں کو زیروں سے تعبیر کیا جائے تو تکمل بالحصص سے

$\int$ف$_{ن}$ ما ءلا = $\int$ف ما ءلا

$$\int ف_{ن-۱}\, ما\, فرلا = ف_{ن-۱}\, ما - \int ف'_{ن-۱}\, ما\, فرلا$$

$$\int ف_{ن-۲}\, ما_{۲}\, فرلا = ف_{ن-۲}\, ما_{۱} - ف'_{ن-۲}\, ما + \int ف''_{ن-۲}\, ما\, فرلا$$

$$\int ف_{ن-۳}\, ما_{۳}\, فرلا = ف_{ن-۳}\, ما_{۲} - ف'_{ن-۳}\, ما_{۱} + ف''_{ن-۳}\, ما - \int ف'''_{ن-۳}\, ما\, فرلا$$

وغیرہ وغیرہ

اس لئے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

$$ف_{ن} - ف'_{ن-۱} + ف''_{ن-۲} - ف'''_{ن-۳} + \ldots\ldots = ۰$$

تو مساوات مفروضہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تفرقی ہے

$$(ف_{ن-۱} - ف'_{ن-۲} + ف''_{ن-۳} - \ldots\ldots)\, ما + (ف_{ن-۲} - ف'_{ن-۳} + \ldots\ldots)\, ما_{۱}$$

$$+ (ف_{ن-۳} - \ldots\ldots)\, ما_{۲} + \ldots\ldots = \int و\, فرلا + ا$$

مثال کیا مساوات $لا^{۴} ما_{۴} + ۱۲ لا^{۳} ما_{۳} + ۳۶ لا^{۲} ما_{۲} + ۲۴ لا\, ما =$ جب لا حاضر مساوات ہے؟

حاضر مساوات کو جانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ف_{۳} = ۲۴ لا ،\ ف_{۲} = ۳۶ لا^{۲} ،\ ف_{۱} = ۱۲ لا^{۳} ،\ ف = لا^{۴}$$

اور $ف_{۳} - ف'_{۲} + ف''_{۱} - ف''' = ۲۴ لا - ۷۲ لا + ۷۲ لا - ۲۴ لا = ۰$

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تکملی ہے

$$(۳۶ لا^{۲} - ۳۶ لا^{۲} + ۱۲ لا^{۲})\, ما + (۱۲ لا^{۳} - ۴ لا^{۳})\, ما_{۱} + لا^{۴} ما_{۲} = -جم لا + ا$$

یا $۱۲ لا^{۲} ما + ۸ لا^{۳} ما_{۱} + لا^{۴} ما_{۲} = -جم لا + ا$

دایاں رکن کامل تفرقی سر ہوگا اگر

$$۱۲\,لا^{۲} - ۲۴\,لا^{۲} + ۱۲\,لا^{۲} = ۰$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا تکملی ہے

$$(۸\,لا^{۳} - ۴\,لا^{۳})\,ما + لا^{۴}\,ما_{۱} = -\,جب\,لا + ا\,لا + ب$$

یا

$$۴\,لا^{۳}\,ما + لا^{۴}\,ما_{۱} = -\,جب\,لا + ا\,لا + ب$$

جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سر ہے، پس تیسرا تکملی ہے

$$لا^{۴}\,ما = جم\,لا + \frac{ا\,لا^{۲}}{۲} + ب\,لا + ج$$

امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ $لا^{۵}\,ما_{۳} + ۱۵\,لا^{۴}\,ما_{۲} + ۶۰\,لا^{۳}\,ما_{۱} + ۶۰\,لا^{۲}\,ما = قو^{لا}$ حاضر مساوات ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$لا^{۲}\,ما_{۳} + ۶\,لا\,ما_{۲} + ۶\,ما_{۱} + جب\,لا\,(ما_{۲} - ۳\,ما_{۱}) + جم\,لا\,(۳\,ما_{۱} - ما) = جب\,لا$$

۳۔ ذیل کی مساواتوں کے پہلے تکملی معلوم کرو۔

(ا) $لا^{۳}\,ما_{۲} + لا\,ما_{۱} + ما = قو^{لا}$

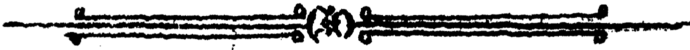
(ب) $لا^{۳}\,ما_{۲} + لا\,ما_{۱} - ما = لا^{۲}\,قو^{لا}$

(ج) $لا^{۵}\,ما_{۴} + لا^{۴}\,ما_{۳} + ما\,ما_{۱} + لا = لوگ\,لا$

۴۔ اگر مساوات $ف_{۲}\,ما + ف_{۱}\,ما_{۱} + ف\,ما_{۲} = و$ کا ایک مکمل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$ف_{۲}\,مہ - \frac{د}{دلا}(ف_{۱}\,مہ) + \frac{د^{۲}}{دلا^{۲}}(ف_{۰}\,مہ) = ۰$$



باب چہارم

مستقل سروں والی خطی، تفرقی مساواتیں

۲۶ - عام خطی تفرقی مساوات

ن ، ویں رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} + \text{ف}_{۱}\frac{\text{فر}^{\text{ن-۱}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن-۱}}} + \text{ف}_{۲}\frac{\text{فر}^{\text{ن-۲}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن-۲}}} + \ldots\ldots + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \text{و} \quad \ldots(۱)$$

جہاں ف، ف$_{۲}$، ف$_{۳}$ ...... ف$_{\text{ن}}$ اور و، لا کے معلوم تفاعل ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل ما = ف (لا) ایسے ہی بھانپ لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔
تب اگر ما = ف (لا) + ی مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ی}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} + \text{ف}_{۱}\frac{\text{فر}^{\text{ن-۱}}\,\text{ی}}{\text{فر لا}^{\text{ن-۱}}} + \text{ف}_{۲}\frac{\text{فر}^{\text{ن-۲}}\,\text{ی}}{\text{فر لا}^{\text{ن-۲}}} + \ldots\ldots + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ی} = \ldots(۲)$$

فرض کرو کہ ی = ی$_{۱}$، ی = ی$_{۲}$، .... ی = ی$_{\text{ن}}$ اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ ی = ا$_{۱}$ی$_{۱}$ + ا$_{۲}$ی$_{۲}$ + ا$_{۳}$ی$_{۳}$ + ... + ا$_{\text{ن}}$ی$_{\text{ن}}$

بھی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں ن مستقل ا$_{۱}$، ا$_{۲}$، ا$_{۳}$ ... ا$_{\text{ن}}$ شامل ہیں۔

اسلئے ما = ا$_{۱}$ی$_{۱}$ + ا$_{۲}$ی$_{۲}$ + ا$_{۳}$ی$_{۳}$ + ... + ا$_{\text{ن}}$ی$_{\text{ن}}$ + ف (لا)

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں ن مستقل شامل ہیں اور اس لئے

یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) **خاص تکملی** (خ ک) کہلاتا ہے اور اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ن مستقل شامل ہیں متمم تفاعل (م ت) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متمم تفاعل اُس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں بائیں رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ **دو مشہور صورتیں** دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقداریں $ف_۱$، $ف_۲$ ...... $ف_ن$ سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات ذیل کی شکل اختیار کرے

$$لا^ن \frac{د^ن ما}{دلا^ن} + ا_۱ لا^{ن-۱} \frac{د^{ن-۱} ما}{دلا^{ن-۱}} + ا_۲ لا^{ن-۲} \frac{د^{ن-۲} ما}{دلا^{ن-۲}} + \cdots$$
$$\cdots + ا_ن ما = ص$$

جہاں $ا_۱$، $ا_۲$ .... $ا_ن$ مستقل ہیں اور ص، لا کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہوگا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

مستقل سروں والی مساواتیں۔ متمم تفاعل

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$ما_ن + ا_۱ ما_{ن-۱} + ا_۲ ما_{ن-۲} + \cdots\cdots + ا_ن ما = \cdots\cdots (۱)$$

کا حل معلوم کرتے ہیں جس میں تمام سر مستقل مقداریں ہیں اور بایاں رکن صفر ہے، یعنی فی الحال ہم صرف "متمم تفاعل" معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

اگر مثال کے طور پر فرض کرو کہ $ما = ا\, و^{م\, لا}$ مساوات کا حل ہے، اسے مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$م^{ن} + ا_{۱}\, م^{ن-۱} + ا_{۲}\, م^{ن-۲} + \ldots\ldots + ا_{ن} = ۰ \quad \ldots\ldots (۲)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں

$$م_{۱}،\ م_{۲}،\ م_{۳}،\ \ldots\ldots\ م_{ن}$$

ہیں جنہیں ہم فی الحال ایک دوسرے کے نا مساوی فرض کرتے ہیں

تب $ا_{۱}\, و^{م_{۱} لا}$، $ا_{۲}\, و^{م_{۲} لا}$، $ا_{۳}\, و^{م_{۳} لا}$، ...... $ا_{ن}\, و^{م_{ن} لا}$

تمام حل ہیں اور اس لئے

$$ما = ا_{۱}\, و^{م_{۱} لا} + ا_{۲}\, و^{م_{۲} لا} + ا_{۳}\, و^{م_{۳} لا} + \ldots\ldots + ا_{ن}\, و^{م_{ن} لا} \quad \ldots\ldots (۳)$$

ایک ایسا حل ہے جس میں ن اختیاری مستقلات $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، $ا_{۳}$ ...... $ا_{ن}$ شامل ہیں اور یہ عام سے عام حل ہے جو حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۹ - دو اصلیں مساوی

اگر مساوات (۲) کی دو اصلیں مساوی ہوں مثلاً $م_{۱} = م_{۲}$ تو حل (۳) کی پہلی دو رقمیں ہو جاتی ہیں $(ا_{۱} + ا_{۲})\, و^{م_{۱} لا}$،

اب چونکہ $ا_{۱} + ا_{۲}$ ایک ہی مستقل ہے، اس لئے اختیاری مستقلات کی تعداد میں ایک کی کمی ہو جاتی ہے اور اس لحاظ سے (۳) مساوات

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔

اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں

فرض کرو کہ $\text{م}_2 = \text{م}_1 + \text{ھ}$

تب $\text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{(\text{م}_1+\text{ھ})\text{لا}}$

$$= \text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} \left(1 + \text{ھ}\,\text{لا} + \frac{\text{ھ}^2\,\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots\right)$$

$$= (\text{ا}_1+\text{ا}_2)\,\text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} + \text{ا}_2\,\text{ھ}\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} + \text{ا}_2\,\text{ھ}\,\text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} \left[\frac{\text{ھ}\,\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots\right]$$

اب چونکہ ا_1 اور ا_2 دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً ا_2 کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب $\text{ا}_2\,\text{ھ}$ جہاں ھ لاانتہا کم ہے ب_2 کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔

ثانیاً ا_1 کو ا_2 سے مختلف العلامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ $\text{ا}_1 + \text{ا}_2$ ایک اختیاری محدود مستقل ب_1 کے مساوی ہو۔

اب رقوم

$$\text{ا}_2\,\text{ھ}\,\text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} \left[\frac{\text{ھ}\,\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \cdots\cdots\cdots\right]$$

ھ کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ $\text{ا}_2\,\text{ھ}$ محدود ہے اور مربع خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مستدق ہے اور اس میں ھ بطور جزوِ ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر $\text{م}_1 = \text{م}_2$ تو رقوم $\text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{م}_2\text{لا}}$ کی بجائے ہم

$\text{ب}_1 \text{و}^{\text{م}_1\text{لا}} + \text{ب}_2\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{م}_1\text{لا}}$ لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیاری

مستقلات کی تعداد ن ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۰۔ **تین اصلیں مساوی** اب ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں جبکہ مساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی $م_۱ = م_۲ = م_۳$ حسب بالا رقوم $ا_۱ و^{م_۱ لا} + ا_۲ و^{م_۲ لا} + ا_۳ و^{م_۳ لا}$ کی بجائے ہم

$(ب_۱ + ب_۲ لا) و^{م_۱ لا} + ا_۳ و^{م_۳ لا}$ رکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $م_۳ = م_۱ + ک$

تب $ا_۳ و^{م_۳ لا} = ا_۳ و^{م_۱ لا} و^{ک لا} = ا_۳ و^{م_۱ لا}\left(۱ + ک لا + \frac{ک^۲ لا^۲}{\lfloor ۲} + \cdots\right)$

پس $ا_۱ و^{م_۱ لا} + ا_۲ و^{م_۱ لا} + ا_۳ و^{م_۳ لا}$ کی بجائے ہم

$$(ب_۱ + ا_۳) و^{م_۱ لا} + (ب_۲ + ا_۳ ک) لا و^{م_۱ لا} + \frac{ا_۳ ک^۲ لا^۲ و^{م_۱ لا}}{\lfloor ۲}$$

$$+ ا_۳ ک^۲ لا^۲ و^{م_۱ لا}\left[\frac{ک لا}{\lfloor ۳} + \frac{ک^۲ لا^۲}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots\right]$$

رکھ سکتے ہیں اور $ا_۳$، $ب_۲$، $ب_۱$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$$ب_۱ + ا_۳ = ج_۱$$

$$ب_۲ + ا_۳ ک = ج_۲$$

$$ا_۳ ک^۲ = ۲ ج_۳$$

جہاں $ج_۱$، $ج_۲$، $ج_۳$ کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ ک کچھ ہی ہو

بشرطیکہ یہ صفر مطلق نہ ہو۔ لیکن چونکہ $ا_2 ک^2$ کو ایک محدود مقدار کے مساوی منتخب کیا گیا ہے اور خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ک کو لاانتہا کم کرنے سے بالآخر اس جملہ کی انتہائی صورت یہ ہوگی $(ج_1 + ج_2 لا + ج_3 لا^2) و^{م_1 لا}$۔

۳۱۔ کئی اصلیں مساوی اس طرح ظاہر ہے کہ اگر مساوات (۲) کی ع اصلیں مساوی ہوں یعنی

$$م_1 = م_2 = م_3 = \dots\dots = م_ع$$

تو ہمارے حل کی عمومیت میں کسی قسم کا فرق نہیں آئے گا اگر ہم متمم تفاعل کے متناظر حصہ

$$ا_1 و^{م_1 لا} + ا_2 و^{م_2 لا} + \dots\dots + ا_ع و^{م_ع لا}$$

کے لئے جملہ $(ک_1 + ک_2 لا + ک_3 لا^2 + \dots\dots + ک_ع لا^{ع-1}) و^{م_1 لا}$ رکھدیں

۳۲۔ تعمیم زیادہ عام طور پر اگر کوئی خطی تفرقی مساوات ہو جس کے سر خواہ مستقل ہوں یا نہ ہوں اور اس کا متمم تفاعل

$$ا_1 فہ(م_1) + ا_2 فہ(م_2) + ا_3 فہ(م_3) + \dots\dots + ا_ن فہ(م_ن)$$

ہو تو معلوم کرو کہ جس صورت میں $م_1 = م_2$ ہو تو اس جملہ کی بجائے کیا رکھا جائے۔

فرض کرو کہ $م_2 = م_1 + ھ$

تب $فہ(م_2) = فہ(م_1 + ھ) = فہ(م_1) + ھ \frac{ق فہ(م_1)}{ق م_1} + \frac{ھ^2}{2!} \frac{ق^2 فہ(م_1)}{ق م_1^2} + \dots$

اور رقمیں $ا_1 فہ(م_1) + ا_2 فہ(م_2)$ ہوجائینگی

$$(\text{ل}_1+\text{ل}_2)\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ل}_2\,\text{ھ}\,\frac{\text{و فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1}+\text{ل}_2\,\frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}\,\frac{\text{و}^2\,\text{فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1^2}+\ldots\ldots$$

اب رکھو $\text{ل}_1+\text{ل}_2=\text{ب}_1$ اور $\text{ل}_2\,\text{ھ}=\text{ب}_2$ جہاں ب_1 اور ب_2 دو محدود مستقل ہیں۔ جب ہم ھ کو لاانتہا کم کرینگے تو اوپر کے سلسلہ کی باقی رقمیں بالآخر معدوم ہو جائیں گی۔

پس $\text{ل}_1\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ل}_2\,\text{فہ}(\text{م}_2)$ کی بجائے

$\text{ب}_1\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ب}_2\,\frac{\text{و فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1}$ رکھا جا سکتا ہے اور اس طرح متمم تفاعل میں اختیاری مستقلات ب_1، ب_2، ل_3، ل_4 ...... $\text{ل}_\text{ن}$ کی وہی تعداد (ن) قائم رہتی ہے جو پہلے تھی۔

اور دفعہ ۳۱ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ع اصلیں مساوی ہوں یعنی $\text{م}_1=\text{م}_2=\text{م}_3=\ldots\ldots=\text{م}_\text{ع}$

تو رقوم $\text{ل}_1\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ل}_2\,\text{فہ}(\text{م}_2)+\ldots\ldots\ldots+\text{ل}_\text{ع}\,\text{فہ}(\text{م}_\text{ع})$ کی بجائے ہم

$$\text{ب}_1\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ب}_2\,\frac{\text{و فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1}+\text{ب}_3\,\frac{\text{و}^2\,\text{فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1^2}+\ldots\ldots+\text{ب}_\text{ع}\,\frac{\text{و}^{\text{ع}-1}\,\text{فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1^{\text{ع}-1}}$$

رکھ سکتے ہیں جس سے حل کی عام شکل قائم رہتی ہے۔

دفعات ۲۹، ۳۰، ۳۱ کے نتائج اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں کہ ان میں $\text{فہ}(\text{م}_1)$ کی صورت $\text{ہ}^{\text{م}_1\text{لا}}$ تھی۔

۳۳۔ خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصلوں کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $\text{م}_1 = \text{ا} + \text{خ ب}$، $\text{م}_2 = \text{ا} - \text{خ ب}$ جہاں $\text{خ} = \sqrt{-1}$

تب رقوم $\text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{م}_2 \text{لا}}$ یا $\text{ا}_1 \text{و}^{(\text{ا}+\text{خ ب})\text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{(\text{ا}-\text{خ ب})\text{لا}}$

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

$$\text{ا}_1 \text{و}^{\text{ا لا}} \text{و}^{\text{خ ب لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{ا لا}} \text{و}^{-\text{خ ب لا}}$$

$$= \text{ا}_1 \text{و}^{\text{ا لا}} (\text{جم ب لا} + \text{خ جب ب لا}) + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{ا لا}} (\text{جم ب لا} - \text{خ جب ب لا})$$

$$= (\text{ا}_1 + \text{ا}_2) \text{و}^{\text{ا لا}} \text{جم ب لا} + (\text{ا}_1 - \text{ا}_2) \text{خ و}^{\text{ا لا}} \text{جب ب لا}$$

$$= \text{ب}_1 \text{و}^{\text{ا لا}} \text{جم ب لا} + \text{ب}_2 \text{و}^{\text{ا لا}} \text{جب ب لا}$$

جہاں $\text{ا}_1 + \text{ا}_2$ اور $(\text{ا}_1 - \text{ا}_2)\text{خ}$ کی بجائے اختیاری مستقل ب_1 اور ب_2 رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ $\text{ب}_1 = \text{د جم عہ}$، $\text{ب}_2 = \text{د جب عہ}$ تب

$$\text{د} = \sqrt{\text{ب}_1^2 + \text{ب}_2^2} \quad \text{اور} \quad \text{عہ} = \text{مس}^{-1} \frac{\text{ب}_2}{\text{ب}_1}$$

$$\text{ب}_1 \text{جم ب لا} + \text{ب}_2 \text{جب ب لا} = \text{د جم}(\text{ب لا} - \text{عہ})$$

پس اس طرح ہم

$$ب_1 و^{ا لا} جم\ ب لا + ب_2 و^{ا لا} جب\ ب لا$$ کی بجائے

$$ج_1 و^{ا لا} جم\ (ب لا + ج_2)$$

رکھ سکتے ہیں جہاں $ج_1$ ، $ج_2$ اختیاری مستقل ہیں۔

۴۴ - مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر $م_2 = م_1$ تو $ا_1 و^{م_1 لا} + ا_2 و^{م_2 لا}$ کی بجائے $(ب_1 + ب_2 لا) و^{م_1 لا}$ لکھا جا سکتا ہے اور $ا_3 و^{م_3 لا} + ا_4 و^{م_4 لا}$ کی بجائے

$$(ب_3 + ب_4 لا) و^{م_3 لا}$$

پھر اگر $م_1 = م_2 = ا + خ ب$ اور $م_3 = م_4 = ا - خ ب$ تو ہم

$$ا_1 و^{م_1 لا} + ا_2 و^{م_2 لا} + ا_3 و^{م_3 لا} + ا_4 و^{م_4 لا}$$

کی بجائے $(ب_1 + ب_2 لا) و^{ا لا} و^{خ ب لا} + (ب_3 + ب_4 لا) و^{ا لا} و^{-خ ب لا}$

یعنی $و^{ا لا} [(ب_1 + ب_3) جم\ ب لا + (ب_1 - ب_3) خ جب\ ب لا]$

$$+ لا\ و^{ا لا} [(ب_2 + ب_4) جم\ ب لا + (ب_2 - ب_4) خ جب\ ب لا]$$

اور اسلئے $و^{ا لا} (ج_1 جم\ ب لا + ج_2 جب\ ب لا) + لا\ و^{ا لا} (ج_3 جم\ ب لا + ج_4 جب\ ب لا)$

یعنی $\text{قو}^{\text{لا}}(\text{ج}_1 + \text{لا}\,\text{ج}_2)\,\text{جم ب لا} + \text{قو}^{\text{لا}}(\text{ج}_3 + \text{لا}\,\text{ج}_4)\,\text{جب ب لا}$

یا دوسری صورت میں $\text{د}_1\,\text{قو}^{\text{لا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{د}_2) + \text{د}_3\,\text{لا}\,\text{قو}^{\text{لا}}\,\text{جم}(\text{ب لا} + \text{د}_4)$

لکھ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات ا_1، ا_2، ا_3، ا_4 کی بجائے ہیں۔ پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (ن) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔

ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اُس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصلوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

۳۵۔ مساوات $\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}^2} - ۳\frac{\text{ف}\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$ کو حل کرو

اس جگہ آزمائشی حل $\text{ما} = \text{ا}\,\text{قو}^{\text{م لا}}$ ہے، اس کو مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}^2 - ۳\text{م} + ۲ = ۰$$

جسکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{قو}^{\text{لا}}$ اور $\text{ما} = \text{ا}_2\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$ دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ا}_2\,\text{قو}^{۲\text{لا}}$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

مثال ۲۔ حل کرو $\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}^2} - \text{ا}^2\,\text{ما} = ۰$ کو

یہاں امدادی مساوات $\text{م}^2 - \text{ا}^2 = ۰$ ہے اور اس کی اصلیں $\text{م} = \pm\,\text{ا}$

اور عام حل ہے $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\text{ا لا}} + \text{ا}_2\,\text{و}^{-\text{ا لا}}$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \text{ب}_1\ \text{جمز ا لا} + \text{ب}_2\ \text{جبنز ا لا}$$

جہاں ا_1 کی بجائے $\frac{\text{ب}_1 + \text{ب}_2}{2}$ اور ا_2 کی بجائے $\frac{\text{ب}_1 - \text{ب}_2}{2}$ لکھا گیا ہے

مثال ۳ ۔ $\frac{\text{د}^2\,\text{ما}}{\text{د لا}^2} + \text{ا}^2\,\text{ما} = 0$ کو حل کرو

یہاں امدادی مساوات $\text{م}^2 + \text{ا}^2 = 0$ کی اصلیں $\text{م} = \pm\,\text{ا خ}$ ہیں

اور عام حل ہے $\text{ما} = (\text{ا}_1\ \text{جم ا لا} + \text{ا}_2\ \text{جب ا لا})$

یا دوسری صورت میں $\text{ما} = \text{ب}_1\ \text{جم}\,(\text{ا لا} + \text{ب}_2)$

مثال ۴ ۔ $\frac{\text{د}^3\,\text{ما}}{\text{د لا}^3} - 4\,\frac{\text{د}^2\,\text{ما}}{\text{د لا}^2} + 5\,\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} - 2\,\text{ما} = 0$

یا $(\text{عف} - 1)^2\,(\text{عف} - 2)\,\text{ما} = 0$ ۔ جہاں $\frac{\text{د}}{\text{د لا}}$ کی بجائے عف لکھا گیا ہے ۔

امدادی مساوات ہے $\text{م}^3 - 4\,\text{م}^2 + 5\,\text{م} - 2 = 0$

یا $(\text{م} - 1)^2\,(\text{م} - 2) = 0$ یعنی اصلیں ۱، ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے $\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ا}_2\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_3\,\text{و}^{2\,\text{لا}}$ ۔

مثال ۵ ۔ $(\text{عف}^2 + 1)\,(\text{عف} - 1)\,\text{ما} = 0$

امدادی مساوات ہے $(\text{م}^2 + 1)\,(\text{م} - 1) = 0$

جس کی اصلیں $\pm$ خ، ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_1\ \text{جم لا} + \text{ا}_2\ \text{جب لا} + \text{ا}_3\,\text{و}^{\text{لا}}$$

یا $\text{ما} = \text{ب}_۱ \,\text{جم}\,(\text{لا} + \text{ب}_۲) + \text{ا}_۳\, \text{و}^{\text{لا}}$

مثال ۶ ۔ حل کرو $(\text{عف}^۲ + \text{عف} + ۱)(\text{عف} - ۲)\, \text{ما} = ۰$ کو

امدادی مساوات ہے $(\text{م}^۲ + \text{م} + ۱)(\text{م} - ۲) = ۰$

اور اس کی اصلیں ہیں $-\frac{۱}{۲} \pm \text{خ}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اور ۲ اس لئے عام حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_۱ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}} \text{جم} \frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{ا}_۲ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}} \text{جب} \frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{ا}_۳ \text{و}^{۲\text{لا}}$$

یا $\text{ما} = \text{ب}_۱ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}} \text{جم} \left(\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{ب}_۲\right) + \text{ا}_۳ \text{و}^{۲\text{لا}}$

مثال ۷ ۔ $(\text{عف}^۲ + \text{عف} + ۱)^۲ (\text{عف} - ۲)^۳ (\text{عف} - ۵)\, \text{ما} = ۰$ کو حل کرو

صریحاً اس کا عام حل ہے

$$\text{ما} = (\text{ا}_۱ + \text{ا}_۲ \text{لا}) \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}} \text{جم} \frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + (\text{ا}_۳ + \text{ا}_۴ \text{لا}) \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}} \text{جب} \frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲}$$

$$+ (\text{ا}_۵ + \text{ا}_۶ \text{لا} + \text{ا}_۷ \text{لا}^۲) \text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ا}_۸ \text{و}^{۵\text{لا}}$$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں ۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

۱۔ $\frac{\text{ف}^۲ \text{ما}}{\text{فلا}^۲} - (\text{ا} + \text{ب}) \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} + \text{اب ما} = ۰$

۲۔ $\frac{\text{ف}^۳ \text{ما}}{\text{فلا}^۳} - ۶\text{ا} \frac{\text{ف}^۲ \text{ما}}{\text{فلا}^۲} + ۱۱\text{ا}^۲ \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} - ۶\text{ا}^۳ \text{ما} = ۰$

۳۔ $\frac{\text{ف}^۳ \text{ما}}{\text{فلا}^۳} - ۹ \frac{\text{ف}^۲ \text{ما}}{\text{فلا}^۲} + ۲۳ \frac{\text{فما}}{\text{فلا}} - ۱۵ \text{ما} = ۰$

۴- $\frac{ڈ^۳ ما}{ڈ لا^۳} - ۳ \frac{ڈ ما}{ڈ لا} + ۲ ما = ۰$ ۵- $\frac{ڈ^۳ ما}{ڈ لا^۳} = ما$

۶- $\frac{ڈ^۴ ما}{ڈ لا^۴} = ما$ ۷- $(عف - ۱)^۲ (عف - ۲)^۳ ما = ۰$

۸- $(عف^۲ + ۱)(عف^۲ + عف + ۱) ما = ۰$ ۹- $(عف^۲ + ۱)^۲ (عف - ۱)^۲ ما = ۰$

۱۰- $(عف^۲ + ۱)^۳ (عف^۲ + عف + ۱)^۲ ما = ۰$

۱۱- $(عف - ۱)^۳ (عف - ۲)(عف^۲ + ۲عف + ۲)^۲ ما = ۰$

۱۲- $(عف^۲ + ا^۲)^۲ (عف^۲ + ب^۲)(عف^۴ + ج^۲ عف^۲ + ج^۴) ما = ۰$

خاص تکملی

۳۶- اوپر ہم نے مساوات $ف(عف) ما = و$ کے ستم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

$$ف(عف) = عف^ن + ا_۱ عف^{ن-۱} + ا_۲ عف^{ن-۲} + \cdots + ا_ن$$

اور $ا_۱، ا_۲$ ...... $ا_ن$ مستقل ہیں $و$، $لا$ کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکملی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں ۔

ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں $ما = \frac{۱}{ف(عف)} و$

یا $[ف(عف)]^{-۱} و$ جہاں $\frac{۱}{ف(عف)}$ ایک ایسا عامل ہے کہ

$$ف(عف) \left[\frac{۱}{ف(عف)} و\right] \equiv و$$

۳۷۔ "عف" جبرو مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے

تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف (یعنی $\frac{\text{د}}{\text{دلا}}$) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے

(۱) جبرو مقابلہ کا تقسیمی قانون یعنی

$$\text{عف}(\text{ی}+\text{و}+\text{ھ}+\dots) = \text{عف}\,\text{ی} + \text{عف}\,\text{و} + \text{عف}\,\text{ھ} + \dots$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی

$$\text{عف}(\text{ج}\,\text{ی}) = \text{ج}(\text{عف}\,\text{ی})$$

(۳) قانون قوت نما یعنی

$$\text{عف}^{\text{م}}\,\text{عف}^{\text{ن}}\,\text{ی} = \text{عف}^{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ی}$$

جہاں م، ن مثبت صحیح ہیں۔

پس رمز یا علامت عف جبریہ مقادیر کی باہمی ترکیب کے تمام ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبریہ تماثل کے جواب میں عاملوں کا بھی ایک متناظر تماثل ہوگا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(\text{م}+\text{ا})^{\text{ن}} = \text{م}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}\,\text{م}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}^{2}\,\text{م}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ا}^{\text{ن}}$$

اور ایسے ہی بغیر مزید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عف}+\text{ا})^{\text{ن}}\,\text{ما} = \left\{\text{عف}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}\,\text{عف}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}^{2}\,\text{عف}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ا}^{\text{ن}}\right\}\text{ما}$$

$$= \text{عف}^{\text{ن}}\,\text{ما} + \text{ن}\,\text{ا}\,\text{عف}^{\text{ن}-1}\,\text{ما} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{ا}^{2}\,\text{عف}^{\text{ن}-2}\,\text{ما} + \dots + \text{ا}^{\text{ن}}\,\text{ما}$$

۳۸ — عمل $ف\ (عف)\ و^{الا}$

تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر ر مثبت صحیح ہو تو

$$عف^{ر}\ و^{الا} = ا^{ر}\ و^{الا}$$

فرض کرو کہ عمل $عف^{-ر}$ ایسا ہے کہ

$$عف^{ر}\ عف^{-ر}\ ی = ی$$

اس تعریف کے مطابق $عف^{-۱}$ عمل تکمل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ عمل $عف^{-۱}\ ی$ میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکملی کی تلاش ہے نہ کہ عام سے عام تکملی کی)

اب چونکہ $عف^{ر}\ ا^{-ر}\ و^{الا} = و^{الا} = عف^{ر}\ عف^{-ر}\ و^{الا}$

اس سے ظاہر ہے کہ $عف^{-ر}\ و^{الا} = ا^{-ر}\ و^{الا}$

اس لئے ظاہر ہے کہ ن کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

$$عف^{ن}\ و^{الا} = ا^{ن}\ و^{الا}$$

۳۹ — فرض کرو کہ $ف\ (ی)$ کوئی جملہ ی کا ہے جو ی کی مثبت یا منفی صحیح قوتوں میں ($= مج\ ا_{ر}\ ی^{ر}$ جہاں $ا_{ر}$ ایک مستقل ہے اور ی پر منحصر نہیں ہے) پھیل سکتا ہے

$$تب\ ف\ (عف)\ و^{الا} = (مج\ ا_{ر}\ عف^{ر})\ و^{الا}$$

$$= (مج\ ا_{ر}\ عف^{ر}\ و^{الا})$$

$$= (مج\ ا_{ر}\ ا^{ر})\ و^{الا}$$

= ف (ا) ولا

عمل ف (عف) ولا کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{عف^3 + عف^2 + عف + 1}$ و^۲لا کی قیمت معلوم کرو۔

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1 + 2 + 2^2 + 2^3} و^{2لا} \text{ یا } \frac{و^{2لا}}{15}$$

مثال ۲۔ $\frac{عف + 1}{(عف + 2)(عف + 3)(عف + 4)}$ و^۳لا کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے $\frac{4}{5 \times 6 \times 7}$ و^۳لا = $\frac{2}{105}$ و^۳لا

امثلہ ۲

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

(۱) $\frac{1}{(عف + 1)^2}$ ولا (۲) $\frac{1}{(عف + 1)(عف + 2)}$ و^۲لا

(۳) $\frac{1}{(عف + 2)(عف + 3)(عف + 4)}$ جم۲لا

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{عف^2}{(عف - ا)(عف - ب)(عف - ج)}$ ولا = $\sum \frac{ا^2}{(ا - ب)(ا - ج)} \frac{1}{عف - ا}$

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

ف (عف^۲) جب م لا = ف (– م^۲) جب م لا

ف (عف^۲) جم م لا = ف (– م^۲) جم م لا

ف (عف^{2}) جمنز م لا = ف (م^{2}) جمنز م لا

۴۰ - عمل ف (عف) ولا لا

فرض کروکہ ما = ولا ما . جہاں ما، لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عف^{ر} ولا = ار ولا

اس لئے لیب نیز کے مسئلہ کی رو سے

ما$_{ن}$ = ولا (ا^{ن} ما + ج$_{۱}^{ن}$ ا$^{ن-۱}$ عف ما + ج$_{۲}^{ن}$ ا$^{ن-۲}$ عف^{۲} ما + ... + عف^{ن} ما)

جیسے مسئلہ ثنائی کی طرح لکھنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۳۷]

∴ عف^{ن} ولا ما = ولا (عف + ا)^{ن} ما

جہاں ن مثبت صحیح ہے۔

اب فرض کروکہ (عف + ا)^{ن} ما = لا

جیسے ہم لکھ سکتے ہیں ما = (عف + ا)$^{-ن}$ لا

تب چونکہ عف^{ن} ولا ما = ولا (عف + ا)^{ن} ما

یا عف^{ن} ولا (عف + ا)$^{-ن}$ لا = ولا لا

اس لئے عف$^{-ن}$ ولا لا = ولا (عف + ا)$^{-ن}$ لا

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

عف^{ن} ولا لا = ولا (عف + ا)^{ن} لا

۴۱ - جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$ف(عف)\, و^{الا}\, لا = \sum (ا_ر\, عف^ر)\, و^{الا}\, لا$$

$$= \sum (ا_ر\, عف^ر\, و^{الا}\, لا)$$

$$= و^{الا} \sum ا_ر\, (عف + ا)^ر\, لا$$

$$= و^{الا}\, ف(عف + ا)\, لا$$

یعنے $و^{الا}$ کو ہم عامل ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب لا سکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + ا لکھدیں۔

مثال ۱ - $\frac{1}{(عف-1)^3}\, و^{لا}\, لا = و^{لا}\, \frac{1}{عف^3}\, لا = و^{لا}\, \frac{لا^4}{2\times3\times4}$

مثال ۲ - $\frac{1}{عف^2 - 4عف + 4}\, و^{2لا}\, جب\, لا = و^{2لا}\, \frac{1}{عف^2}\, جب\, لا = - و^{2لا}\, جب\, لا$

امثلہ ۳

۱ - ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$\frac{1}{(عف-1)^3}\, و^{لا}\, لا^2$ ، $\frac{1}{(عف-1)^2}\, و^{لا}\, جب\, لا$ ، $\frac{1}{عف-1}\, و^{لا}\, لوک\, لا$

۲ - ثابت کرو کہ

$$و^{الا}\, \frac{1}{(عف+ا-1)(عف+ا-2)}\, و^{بلا} = و^{بلا}\, \frac{1}{(عف+ب-1)(عف+ب-2)}\, و^{الا}$$

۴۲ - عمل $ف(عف^2)\, \frac{جب}{جم}\, م\, لا$

$$\text{عف}^{2}\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا} = (-\text{م}^{2})\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا}$$

اور اس لئے

$$\text{عف}^{2\text{ر}}\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا} = (-\text{م}^{2})^{\text{ر}}\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا}$$

اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$\text{ف}(\text{عف}^{2})\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا} = \text{ف}(-\text{م}^{2})\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا}$$

مثال ۱: $\int \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جب ب لا در لا} = \text{عف}^{-1}\ \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جب ب لا} = \text{و}^{\text{ا لا}}(\text{عف}+\text{ا})^{-1}\ \text{جب ب لا}$ [دفعہ ۴۱]

$$= \text{و}^{\text{ا لا}}\ \frac{\text{ا} - \text{عف}}{\text{ا}^{2} - \text{عف}^{2}}\ \text{جب ب لا}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{ا لا}}}{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}}\ (\text{ا} - \text{عف})\ \text{جب ب لا} \quad [\text{دفعہ ۴۲}]$$

$$= \text{و}^{\text{ا لا}}\ \frac{\text{ا جب ب لا} - \text{ب جم ب لا}}{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}} = \text{و}^{\text{ا لا}}(\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2})^{-\frac{1}{2}}\ \text{جب}\left(\text{ب لا} - \text{یس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$$

امثلہ

۱- اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکملی معلوم کرو

$\text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{جم ب لا}$، $\text{و}^{\text{لا}}\ \text{جب}^{2}\ \text{لا}$، $\text{و}^{\text{لا}}\ \text{جب}^{3}\ \text{لا}$، جبز لا جب لا

۲- ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{1}{\text{عف}^{2}+2}\ \text{جب ۲ لا}،\quad \frac{1}{\text{عف}^{4}+1}\ \text{جم لا}،\quad \frac{\text{عف}^{2}+1}{\text{عف}^{4}+1}\ \text{جب ۲ لا}$$

۳- جیب اور جیب التمام کی قوت نمائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال ف(عف) جم م لا، ف(عف) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

۴۳ - عمل $\frac{1}{\text{ف (عف)}} \ \text{جب/جم} \ \text{م لا}$

اب ہم عمل $\frac{1}{\text{ف (عف)}}$ جب م لا پر غور کرینگے جہاں ف (ی) ایک ایسا تفاعل ی کا ہے کہ اسے ہم ی کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (عف) کو عف کی قوتوں میں پھیلایا گیا ہے، اب اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً $\frac{1}{1+\text{عف}^2+\text{عف}^4+\text{عف}^6}\ \text{جب ۲ لا} = \frac{1}{1-4+16-64}\ \text{جب ۲ لا} = -\frac{1}{51}\ \text{جب ۲ لا}$

لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل مذکور کو اس طرح لکھو

$$\frac{1}{\text{ف (عف)}}\ \text{جب م لا} = \frac{1}{\text{فہ}(\text{عف}^2)+\text{عف فا}(\text{عف}^2)}\ \text{جب م لا}$$

$$= \frac{\text{فہ}(\text{عف}^2)-\text{عف فا}(\text{عف}^2)}{[\text{فہ}(\text{عف}^2)]^2-\text{عف}^2[\text{فا}(\text{عف}^2)]^2}\ \text{جب م لا}$$

$$= \frac{[\text{فہ}(\text{عف}^2)-\text{عف فا}(\text{عف}^2)]\ \text{جب م لا}}{[\text{فہ}(-\text{م}^2)]^2+\text{م}^2[\text{فا}(-\text{م}^2)]^2}$$

$$= \frac{\text{فہ}(-\text{م}^2)\ \text{جب م لا} - \text{م فا}(-\text{م}^2)\ \text{جم م لا}}{[\text{فہ}(-\text{م}^2)]^2+\text{م}^2[\text{فا}(-\text{م}^2)]^2}$$

بغور دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ عملی طور پر عف^2 کی بجائے $-\text{م}^2$ فوراً اس منزل $\frac{1}{\text{فہ}(\text{عف}^2)+\text{عف فا}(\text{عف}^2)}$ جب م لا کے بعد لکھ سکتے ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$\frac{1}{\text{فہ}(-\text{م}^2)+\text{عف فا}(-\text{م}^2)} \text{ جب م لا}$$

یا

$$\frac{\text{فہ}(-\text{م}^2)-\text{عف فا}(-\text{م}^2)}{[\text{فہ}(-\text{م}^2)]^2-\text{عف}^2[\text{فا}(-\text{م}^2)]^2} \text{ جب م لا وغیرہ}$$

فوراً لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{\text{عف}^3+\text{عف}^2+\text{عف}+1}$ جب ۲ لا کی قیمت معلوم کرو۔

یہ ہے $\frac{1}{\text{عف}^2+1+\text{عف}(\text{عف}^2+1)}$ جب ۲ لا

یا $\frac{1}{-3(1+\text{عف})}$ جب ۲ لا

یا $\frac{\text{عف}-1}{-3(\text{عف}^2-1)}$ جب ۲ لا

یا $(\text{عف}-1)\frac{\text{جب ۲ لا}}{15}$

یا $\frac{2}{15}$ جم ۲ لا $-\frac{1}{15}$ جب ۲ لا

مثال ۲۔ $\frac{1}{(\text{عف}-1)^3}$ $\text{و}^{2\text{لا}}$ جم لا کی قیمت حاصل کرو

یہ جملہ = $\text{و}^{\text{۲لا}} \frac{\text{۱}}{(\text{عف}+\text{۱})^{\text{۳}}}$ جم لا

$= \text{و}^{\text{۲لا}} \frac{\text{۱}}{\text{عف}^{\text{۳}}+\text{۳عف}^{\text{۲}}+\text{۳عف}+\text{۱}}$ جم لا

$= \text{و}^{\text{۲لا}} \frac{\text{۱}}{-\text{عف}-\text{۳}+\text{۳عف}+\text{۱}}$ جم لا [$\text{عف}^{\text{۲}}$ کی بجائے ۱- لکھنے سے]

$= \frac{\text{و}^{\text{۲لا}}}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{عف}-\text{۱}}$ جم لا

$= \frac{\text{و}^{\text{۲لا}}}{\text{۲}} \cdot \frac{\text{عف}+\text{۱}}{\text{عف}^{\text{۲}}-\text{۱}}$ جم لا

$= \frac{\text{و}^{\text{۲لا}}}{\text{۲}} (\text{عف}+\text{۱}) \frac{\text{جم لا}}{-\text{۲}} = -\frac{\text{و}^{\text{۲لا}}}{\text{۴}} (\text{جم لا} - \text{جب لا})$

امثلہ

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$\frac{\text{عف}}{\text{عف}-\text{۱}} \text{و}^{\text{لا}} \text{جب لا} ، \frac{\text{عف}^{\text{۳}}}{(\text{عف}-\text{۱})(\text{عف}-\text{۲})} \text{و}^{\text{لا}} \text{جب لا}$

$\frac{\text{۱}}{\text{عف}-\text{۱}} \text{و}^{\text{لا}} \text{جب لا} + \frac{\text{۱}}{\text{عف}+\text{۱}} \text{و}^{-\text{لا}} \text{جب لا}$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{۱}}{(\text{عف}+\text{۱})^{\text{ن}}} \text{ی} = \text{و}^{-\text{لا}} \int\int \ldots \text{ی} \, \text{و}^{\text{لا}} \, \text{د لا} \ldots \text{د لا}$

جہاں ن تکملی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{۱}}{\text{ف (ی)}}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے

عمل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}\text{و}$ معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}\text{و}$ جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}\text{و}$ میں و متغیر لا کا ایک جبریہ، منطق، صحیح تفاعل ہو تو ہم $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}$ کو کسی نہ کسی طریقہ سے عف کی صعودی قوتوں میں اس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ عف کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً معلوم کرو $\frac{1}{1+\text{عف}+\text{عف}^2}(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1-\text{عف}}{1-\text{عف}^3}(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$$

$$= (1-\text{عف}+\text{عف}^3-\text{عف}^4+\dots)(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$$

$$= (\text{لا}^2+\text{لا}+1)-(2\text{لا}+1) = \text{لا}^2-\text{لا}$$

مثال ۲۔ بتاؤ $\frac{1}{\text{عف}^3+3\text{عف}^2+7\text{عف}-1}\text{و}^{\text{لا}}\text{لا}^3$ کی قیمت دریافت کرو

$$\text{جملہ} = \text{و}^{\text{لا}}\frac{1}{(\text{عف}+1)^3+3(\text{عف}+1)^2+7(\text{عف}+1)-1}\text{لا}^3$$

$$= \text{و}^{\text{لا}}\frac{1}{10+16\text{عف}+6\text{عف}^2+\text{عف}^3}\text{لا}^3$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{10}\frac{1}{1+\frac{8}{5}\text{عف}+\frac{3}{5}\text{عف}^2+\frac{1}{10}\text{عف}^3}\text{لا}^3$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۱۰}\left(۱ - \frac{۸}{۵}\,\text{عف} + \frac{۴۹}{۲۵}\,\text{عف}^{۲} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰}\,\text{عف}^{۳} \ldots\right)\text{لا}^{۳}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۱۰}\left(\text{لا}^{۳} - \frac{۸}{۵} \times ۳\,\text{لا}^{۲} + \frac{۴۹}{۲۵} \times ۶\,\text{لا} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} \times ۶\right)$$

امثلہ

ذیل کے عمل کرو۔

۱- $\frac{۱}{(\text{عف}+۱)(\text{عف}+۲)}\,\text{لا}^{۲}$ ، $\frac{۱}{\text{عف}(\text{عف}-۱)}\,\text{لا}$ ، $\frac{۱}{\text{عف}^{۲}(\text{عف}-۱)^{۲}}\,\text{لا}$

۲- $\frac{۱}{(\text{عف}+۱)(\text{عف}+۲)}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{لا}^{۲}$ ، $\frac{۱}{\text{عف}(\text{عف}-۱)}\,\text{لا جمز لا}$

۳- $\frac{۱}{(\text{عف}-۱)}\,\text{لا جمز لا جم لا}$

۴۵- ایسی صورتیں جن میں یہ طریقے ناکام رہتے ہیں۔

خاص تکملی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ طریقے کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

۴۶- مساوات $\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} - \text{ما} = \text{و}^{\text{لا}}$ کو حل کرو

متمم تفاعل ر و ہے۔

خاص تکملی حاصل کرنے کے لئے $\frac{۱}{\text{عف}-۱}\,\text{و}^{\text{لا}}$ کی قیمت معلوم ہونی چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۱-۱} \text{ یا } \infty$$

اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۱۴ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}}\,\frac{1}{\text{عف}}\,1 = \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}$$

جو مطلوبہ خاص تکملی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل $\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}$ کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱ + ھ) لکھنے سے

$$\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}} = \text{ہا}_{\text{ھ}=0}\,\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}(1+\text{ھ})} = \text{ہا}_{\text{ھ}=0}\,\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{و}^{\text{ھ}\text{لا}}$$

$$= \text{ہا}_{\text{ھ}=0}\,\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{و}^{\text{لا}}\left(1+\text{ھ}\text{لا}+\frac{\text{ھ}^2\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{ھ}^3\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\cdots\right)$$

$$= \text{ہا}_{\text{ھ}=0}\left[\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ھ}}+\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}+\text{ھ}\,\text{و}^{\text{لا}}\left\{\frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{ھ}\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\cdots\right\}\right]$$

اس جملہ میں سے حصہ $\text{ہا}\,\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ھ}}$ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے ہم متمم تفاعل ا $\text{و}^{\text{لا}}$ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ ا کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم ا + $\frac{1}{\text{ھ}}$ کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ ا کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جا سکتا ہے جو رقم $\frac{1}{\text{ھ}}$ کا توازن کر دے گا۔

پس لا $\text{و}^{\text{لا}}$ مطلوبہ خاص تکملی ہے۔

باقی رقموں میں ھ شریک ہوتا ہے جو ھ کے لاانتہا کم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

پس مساوات کا پورا حل $\text{ی} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}$ ہے۔

مثال ۲۔ مساوات $\frac{\text{ق}^{۲}\,\text{ما}}{\text{ق لا}^{۲}} + ۴\,\text{ما} = \text{ق}^{\text{لا}} + \text{جب ۲ لا}$ کو حل کرو

متمم تفاعل صریحاً یہ ہے ما = اجب ۲ لا + ب جم ۲ لا

خاص تکملی کے دو حصے ہیں $\frac{۱}{\text{عف}^{۲}+۴}\,\text{ق}^{\text{لا}}$ یا $\frac{۱}{۵}\,\text{ق}^{\text{لا}}$ اور $\frac{۱}{\text{عف}^{۲}+۴}$ جب ۲ لا

دوسرے حصہ میں اگر دفعہ ۲۴ کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو حاصل ہوگا

$\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{صفر}}$ یعنی ∞، پس یہ قاعدہ ناکام رہے گا۔

اب ہم $\frac{۱}{\text{عف}^{۲}+۴}$ جب ۲ لا (۱ + ھ) کی انتہا معلوم کرتے ہیں جبکہ ھ = ۰

$$\text{یہ جملہ} = \frac{۱}{۴}\,\frac{۱}{۱-(۱+\text{ھ})^{۲}}\ \text{جب}(۲\,\text{لا} + ۲\,\text{ھ لا})$$

$$= \frac{۱}{۴}\,\frac{۱}{-۲\text{ھ}-\text{ھ}^{۲}}\left(\text{جب ۲ لا جم ۲ ھ لا} + \text{جم ۲ لا جب ۲ ھ لا}\right)$$

$$= -\frac{۱}{۸}\,\frac{۱}{\text{ھ}+\frac{\text{ھ}^{۲}}{۲}}\left[\text{جب ۲ لا}\left(۱-\frac{۴\,\text{ھ}^{۲}\,\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \dots\right) + \text{جم ۲ لا}(۲\,\text{ھ لا} - \dots)\right]$$

$$= -\frac{۱}{۸}\,\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{ھ}} - \frac{۱}{۴}\,\text{لا جم ۲ لا} + \text{ھ کی قوتیں}$$

= (ایک ایسی رقم جو متمم تفاعل میں شریک کردی جاسکتی ہے) $- \frac{\text{لا جم ۲ لا}}{۴}$ + (رقمیں جو ھ کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)

پس تفرقی مساوات کا پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{اجب ۲ لا} + \text{ب جم ۲ لا} + \frac{۱}{۵}\,\text{ق}^{\text{لا}} - \frac{\text{لا جم ۲ لا}}{۴}$$

مثال ۳ ۔ مساوات $(\text{عف}^2 + ۳\text{عف})(\text{عف} - ۱)^2 \text{ما} = \text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{۲\text{لا}} + \text{جیب لا} + \text{لا}^2$ کو حل کرو۔

اس صورت میں متمم تفاعل صریحاً $\text{ا}_۱ + \text{ا}_۲ \text{قو}^{-۳\text{لا}} + (\text{ا}_۳ + \text{ا}_۴ \text{لا})\text{قو}^{\text{لا}}$ ہے۔
خاص تکملی کے چار حصے ہیں یعنی

$$\frac{۱}{(\text{عف}^2+۳\text{عف})(\text{عف}-۱)^2}\text{قو}^{\text{لا}} = \frac{۱}{(\text{عف}-۱)^2}\frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{۴} = \frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{۴} \times \frac{۱}{\text{عف}^2} ۱ = \frac{\text{لا}^2 \text{قو}^{\text{لا}}}{۸}$$

$$\left[\text{یا ملاحظہ ہو } \frac{۱}{(\text{عف}-۱)^2}\frac{\text{قو}^{(۱+\text{ھ})\text{لا}}}{۴} = \frac{۱}{۴\text{ھ}^2}\text{قو}^{\text{لا}}\left(۱+\text{ھ لا}+\frac{\text{ھ}^2\text{لا}^2}{\boxed{۲}}+\cdots\right)\right]$$

= (ایک حصہ جو متمم تفاعل میں چلا جاتا ہے)

$+ \frac{\text{لا}^2}{۸}\text{قو}^{\text{لا}} +$ (ایسی رقمیں جو ھ کے ساتھ معدوم ہوجاتی ہیں)

$$\frac{۱}{(\text{عف}^2+۳\text{عف})(\text{عف}-۱)^2}\text{قو}^{۲\text{لا}} = \frac{۱}{۱۰}\text{قو}^{۲\text{لا}}$$

$$\frac{۱}{(\text{عف}^2+۳\text{عف})(\text{عف}-۱)^2}\text{جیب لا} = \frac{۱}{(-۱+۳\text{عف})(-۲\text{عف})}\text{جیب لا}$$

$$= \frac{۱}{-۶\text{عف}^2+۲\text{عف}}\text{جیب لا} = \frac{۱}{۶+۲\text{عف}}\text{جیب لا} = \frac{۳-\text{عف}}{۲(۹-\text{عف}^2)}\text{جیب لا}$$

$$= (۳\,\text{جیب لا} - \text{جم لا})/۲۰$$

اور اخیر میں

$$\frac{۱}{(\text{عف}^2+۳\text{عف})(\text{عف}-۱)^2}\text{لا}^2 = \frac{۱}{۳\text{عف}}\left(۱+\frac{\text{عف}}{۳}\right)^{-۱}(۱+۲\text{عف}+۳\text{عف}^2+\cdots)\text{لا}^2$$

$$= \frac{۱}{۳\text{عف}}\left(۱+\frac{\text{عف}}{۳}\right)^{-۱}(\text{لا}^2+۴\text{لا}+۶)$$

$$= \frac{1}{\text{۳عف}}\left(1 - \frac{\text{عف}}{\text{۳}} + \frac{\text{عف}^2}{\text{۹}} - \ldots\right)(\text{لا}^2 + \text{۴لا} + \text{۶})$$

$$= \frac{1}{\text{۳عف}}\left(\text{لا}^2 + \text{۴لا} + \text{۶} - \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\text{لا} - \frac{\text{۴}}{\text{۳}} + \frac{\text{۲}}{\text{۹}}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{۳عف}}\left(\text{لا}^2 + \frac{\text{۱۰}}{\text{۳}}\text{لا} + \frac{\text{۴۴}}{\text{۹}}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{۳}}\left(\frac{\text{لا}^3}{\text{۳}} + \frac{\text{۵}}{\text{۳}}\text{لا}^2 + \frac{\text{۴۴}}{\text{۹}}\text{لا}\right)$$

اس لئے پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_1 + \text{ا}_2\,\text{و}^{-\text{۳لا}} + (\text{ا}_3 + \text{ا}_4\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{لا}^2\,\text{و}^{\text{لا}}}{\text{۸}} + \frac{\text{و}^{\text{۲لا}}}{\text{۱۰}} + \frac{\text{۳جب لا} - \text{جم لا}}{\text{۳۰}} + \frac{\text{لا}^3}{\text{۹}} + \frac{\text{۵ لا}^2}{\text{۹}} + \frac{\text{۴۴}}{\text{۲۷}}$$

مثال ۴ ۔ مساوات $\frac{\text{د}^4\,\text{ما}}{\text{د لا}^4} - \text{ما} = \text{لا جب لا}$ کو حل کرو

تتمہ تفاعل (م، ت) ہے $\text{ا}_1\,\text{جیبز لا} + \text{ا}_2\,\text{جمز لا} + \text{ا}_3\,\text{جب لا} + \text{ا}_4\,\text{جم لا}$

(خاص تکملی) (خ، ک) ہے $\frac{1}{\text{عف}^4 - 1}$ لا جب لا جو خ کا سر ہے

$$\frac{1}{\text{عف}^4 - 1}\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{ح لا}} \text{ میں}$$

$$\text{یعنی } \text{و}^{\text{ح لا}}\,\frac{1}{(\text{عف} + \text{ح})^4 - 1}\,\text{لا} \text{ میں}$$

$$\text{یعنی } \text{و}^{\text{ح لا}}\,\frac{1}{-\text{۴ح عف} - \text{۶عف}^2 \ldots}\,\text{لا} \text{ میں}$$

یعنی $\text{و}^{-\text{خ لا}} \frac{۱}{-۴\,\text{خ عف}\;\; ۱ - \frac{۳}{۲}\,\text{خ عف}\ldots}\text{لا}$ میں

یعنی $\text{و}^{\text{خ لا}} \frac{\text{خ}}{۴}\,\frac{۱}{\text{عف}}\left(\text{لا} + \frac{۳}{۲}\text{خ}\right)$ میں

یعنی $\text{و}^{\text{خ لا}}\left(\frac{\text{خ لا}^۲}{۸} - \frac{۳}{۸}\,\text{لا}\right)$ میں

پس خاص تکملی ہے $\frac{\text{لا}^۲\text{جم لا}}{۸} - \frac{۳}{۸}\,\text{لا جب لا}$

اور پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_۱\,\text{جنبز لا} + \text{ا}_۲\,\text{جمز لا} + \text{ا}_۳\,\text{جب لا} + \text{ا}_۴\,\text{جم لا} + \frac{\text{لا}^۲\text{جم لا}}{۸} - \frac{۳}{۸}\,\text{لا جب لا}$$

امثلہ

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکملی حاصل کرو

(۱) $\frac{۱}{\text{عف}^۲ + ۱}\,\text{جب لا}$ (۲) $\frac{۱}{\text{عف}^۲ + ۴}\,\text{جم ۲ لا}$

(۳) $\frac{۱}{\text{عف}^۲ - ۱}\,\text{جنبز لا}$ (۴) $\frac{۱}{\text{عف}^۲ - ۱}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{لا}$

(۵) $\frac{۱}{(\text{عف}-۱)(\text{عف}-۲)(\text{عف}-۳)}\,\text{و}^{\text{لا}}$ (۶) $\frac{۱}{\text{عف}^۴ - ۱}\,(\text{جنبز لا} + \text{جب لا})$

(۷) $\frac{۱}{(\text{عف}^۲ - \text{ا}^۲)(\text{عف}^۲ - \text{ب}^۲)}\,(\text{و}^{\text{ا لا}} + \text{جمز ب لا})$

(۸) $\frac{۱}{(\text{عف}^۲ + ۱)(\text{عف}^۲ + ۴)}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}}{۲}\,\text{جم}\,\frac{۳\text{لا}}{۲}$

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\frac{\text{ف}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - \text{ما} = \text{ق}^{2\text{لا}}$ (۲) $\frac{\text{ف}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} - \text{ما} = \text{جمزلا}$

(۳) $\frac{\text{ف}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} + \text{ما} = \text{ق}^{-\text{لا}} + \text{جم لا} + \text{لا}^{3} + \text{ق}^{\text{لا}}\text{جب لا}$

(۴) $(\text{عف}^{2} - 1)(\text{عف}^{3} - 1)\text{ما} = \text{لا ق}^{\text{لا}}$

(۵) $(\text{عف} - 1)(\text{عف} + 1)\text{عف}^{2}\text{ما} = \text{لا}$

(۶) $(\text{عف}^{3} - 3\text{عف}^{2} - 3\text{عف} + 1)\text{ما} = \text{ق}^{-\text{لا}} + \text{لا}$

(۷) $(\text{عف}^{3} - 1)\text{ما} = \text{لا جب لا}$

(۸) $(\text{عف}^{2} - 1)\text{ما} = \text{لا ق}^{\text{لا}}\text{جب لا}$

(۹) $(\text{عف}^{2} - 1)\text{ما} = \text{جمزلا جم لا} + \text{ل}^{\text{لا}}$

(۱۰) $(\text{عف} - 1)^{2}(\text{عف}^{2} + 1)^{2}\text{ما} = \text{جب}^{2}\frac{\text{لا}}{2} + \text{ق}^{\text{لا}} + \text{لا}$

۷۴ ـ عامل لا $\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}$

اس قسم کی مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ا}_1\text{لا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-1}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-1}} + \text{ا}_2\text{لا}^{\text{ن}-2}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-2}} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{ما} = \text{و}$$

کو جس میں ا_1، ا_2 ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ مستقل ہیں مناسب طریق پر تبدیل کرنے سے ایسی شکل میں لا سکتے ہیں جس میں تمام سر مستقل ہو جائیں۔ یہ تبدیلی $\text{لا} = \text{ق}^{\text{ت}}$ رکھنے سے وقوع پذیر ہوتی ہے۔

اس صورت میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ق}^{\text{ت}}$ اور اس لئے $\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$

ظاہر ہے کہ عامل لا $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}}{\text{فرت}}$ ایک دوسرے کے معادل ہیں

فرض کرو کہ $\frac{\text{و}}{\text{وت}}$ کی بجائے ہم عف لکھتے ہیں، اس طرح سے حاصل ہوگا

$$\text{لا}\frac{\text{و}}{\text{ولا}}\left(\text{لا}^{\text{ن-۱}}\frac{\text{و}^{\text{ن-۱}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن-۱}}}\right)=\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن}}}+(\text{ن-۱})\text{لا}^{\text{ن-۱}}\frac{\text{و}^{\text{ن-۱}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن-۱}}}$$

$$\text{یا}\quad\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن}}}=\left(\text{لا}\frac{\text{و}}{\text{ولا}}-\text{ن}+\text{۱}\right)\text{لا}^{\text{ن-۱}}\frac{\text{و}^{\text{ن-۱}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن-۱}}}$$

$$=(\text{عف}-\text{ن}+\text{۱})\,\text{لا}^{\text{ن-۱}}\frac{\text{و}^{\text{ن-۱}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن-۱}}}$$

اب ن کو بالتواتر ۲، ۳، ۴، ..... کے مساوی رکھنے سے

$$\text{لا}^{\text{۲}}\frac{\text{و}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{۲}}}=(\text{عف}-\text{۱})\,\text{لا}\frac{\text{و}\text{ما}}{\text{ولا}}=(\text{عف}-\text{۱})\,\text{عف ما}$$

$$\text{لا}^{\text{۳}}\frac{\text{و}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{۳}}}=(\text{عف}-\text{۲})\,\text{لا}^{\text{۲}}\frac{\text{و}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{۲}}}=(\text{عف}-\text{۲})(\text{عف}-\text{۱})\,\text{عف ما وغیرہ}$$

اس لئے عام طور پر

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{ن}}}=(\text{عف}-\text{ن}+\text{۱})(\text{عف}-\text{ن}+\text{۲})\ldots(\text{عف}-\text{۱})\,\text{عف ما}$$

یا اِن عملوں کی ترتیب الٹنے سے

$$\text{عف}\,(\text{عف}-\text{۱})(\text{عف}-\text{۲})\ldots(\text{عف}-\text{ن}+\text{۱})\,\text{ما}$$

مثال - ذیل کی تفرقی مساوات کو حل کرو،

$$\text{لا}^{\text{۳}}\frac{\text{و}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{۳}}}+\text{۲لا}^{\text{۲}}\frac{\text{و}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{ولا}^{\text{۲}}}+\text{۳ لا}\frac{\text{و}\text{ما}}{\text{ولا}}-\text{۳ما}=\text{لا}^{\text{۲}}+\text{لا}$$

رکھو لا = $\text{ہ}^{\text{ت}}$، اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$\text{عف}(\text{عف}-\text{۱})(\text{عف}-\text{۲})\text{ما}+\text{۲عف}(\text{عف}-\text{۱})\text{ما}+\text{۳عف ما}-\text{۳ما}=\text{ہ}^{\text{۲ت}}+\text{ہ}^{\text{ت}}$$

یا $\left(\text{عف}^{۳} - \text{عف}^{۲} + ۳\,\text{عف} - ۳\right)\text{ما} = \text{و}^{۲\text{ت}} + \text{و}^{\text{ت}}$

یعنی $\left(\text{عف} - ۱\right)\left(\text{عف}^{۲} + ۳\right)\text{ما} = \text{و}^{۲\text{ت}} + \text{و}^{\text{ت}}$

جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{ت}} + \text{ب جم ت}\sqrt{۳} + \text{ج جب ت}\sqrt{۳} + \frac{\text{و}^{۲\text{ت}}}{۷} + \frac{\text{ت}\,\text{و}^{\text{ت}}}{۴}$$

$$\text{یا ما} = \text{ا لا} + \text{ب جم}\left(\sqrt{۳}\ \text{لوک لا}\right) + \text{ج جب}\left(\sqrt{۳}\ \text{لوک لا}\right) + \frac{\text{لا}^{۲}}{۷} + \frac{\text{لا لوک لا}}{۴}$$

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

$$۱-\ \text{لا}^{۲}\frac{\text{و}^{۲}\text{ما}}{\text{ولا}^{۲}} + \text{لا}\frac{\text{و ما}}{\text{ولا}} + \text{ق}^{۲}\,\text{ما} = ۰$$

$$۲-\ \text{لا}^{۲}\frac{\text{و}^{۲}\text{ما}}{\text{ولا}^{۲}} + \text{لا}\frac{\text{و ما}}{\text{ولا}} + \text{ق}^{۲}\,\text{ما} = \left(\text{لوک لا}\right)^{۲} + \text{لا جب لوک لا} + \text{جب ق لوک لا}$$

$$۳-\ \text{لا}^{۳}\frac{\text{و}^{۳}\text{ما}}{\text{ولا}^{۳}} + ۳\,\text{لا}^{۲}\frac{\text{و}^{۲}\text{ما}}{\text{ولا}^{۲}} + \text{لا}\frac{\text{و ما}}{\text{ولا}} + \text{ما} = \text{لا} + \text{لوک لا}$$

$$۴-\ \text{لا}^{۳}\frac{\text{و}^{۳}\text{ما}}{\text{ولا}^{۳}} + ۲\,\text{لا}^{۲}\frac{\text{و}^{۲}\text{ما}}{\text{ولا}^{۲}} - \text{لا}\frac{\text{و ما}}{\text{ولا}} + \text{ما} = \text{لا} + \text{لا}^{۳}$$

$$۵-\ \left(\text{ا} + \text{ب لا}\right)^{۲}\frac{\text{و}^{۲}\text{ما}}{\text{ولا}^{۲}} + \text{ب}\left(\text{ا} + \text{ب لا}\right)\frac{\text{و ما}}{\text{ولا}} + \text{ق}^{۲}\,\text{ما} = ۰$$



باب پنجم

قائم مریات، متفرق مساواتیں

قائم مری

۴۸ - کارٹیزی مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ا) = ۰ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل ا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہونا چاہئے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ ا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

$$ف\,(لا، ما، ا) = ۰$$

$$\frac{جف\ ف}{جف\ لا} + \frac{جف\ ف}{جف\ ما} \times \frac{د\ ما}{د\ لا} = ۰$$

فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط $فہ\left(لا، ما، \frac{د\ ما}{د\ لا}\right) = ۰$ ہے

پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اُس نقطہ پر ان دو منحنیات کے مماس علی القوائم ہیں۔
پس اگر اس نقطۂ تقاطع کے رواں محدد بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے ضا، عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدد لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}،\ \text{عا} = \text{ما}،\ \frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = -\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{ہ}\left(\text{ضا}،\ \text{عا}،\ -\frac{\text{فرضا}}{\text{فرعا}}\right) = 0$$

اور اس کو تکمل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مرمیات کا قبیل حاصل ہوگا۔
اس لئے قاعدہ یہ ہے۔
مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے $-\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمل کرو۔

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محددوں میں دی ہوئی ہو تو وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر مماس کے ساتھ بناتا ہے $\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}}$ ہوگا، اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}}$ کی بجائے $-\frac{1}{\text{ر}}\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}$ لکھکر نئی تفرقی مساوات کو تکمل کرو۔

۵۰۔ دائروں کے قبیل $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\text{ر لا}$ .... (۱)
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مرمیات

کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\text{لا} + \text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ا}$

اور ا کو ساقط کرنے سے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲\,\text{لا}\left(\text{لا} + \text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)$

یعنی $\text{لا}^2 + ۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \text{ما}^2 = ۰$ .... (۲)

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{لا}^2 - ۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} - \text{ما}^2 = ۰$$

یا $\text{ما}^2 + ۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} - \text{لا}^2 = ۰$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں ما = و لا رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ لا، ما کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے، اس لئے اس کا تکملی ہوگا

$$\text{ما}^2 + \text{لا}^2 = ۲\,\text{ب}\,\text{ما}$$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور لا کو مبدأ پر مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ متحنیات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = ۱$ .... (۱)

کے قائم مربیات کا نظام معلوم کرو جہاں لہ اس قبیل کا متبدل ہے۔

یہاں $\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = ۰$ .... (۲)

اور ان دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے $\text{لا}\,(\text{ب}^2 + \text{له}) + \text{ما}\,\text{ما}_1\,(\text{ا}^2 + \text{له}) = 0$

$$\text{یا}\qquad \text{له} = -\,\frac{\text{ب}^2\,\text{لا} + \text{ا}^2\,\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1}$$

$$\text{پس}\qquad \text{ا}^2 + \text{له} = \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1}$$

$$\text{اور}\qquad \text{ب}^2 + \text{له} = -\,\frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2\,(\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1)}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{لا}} - \frac{\text{ما}^2\,(\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1)}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ما}\,\text{ما}_1} = 1$$

$$\text{یا}\qquad \text{لا}^2 - \text{ما}^2 + \text{لا}\,\text{ما}\left(\text{ما}_1 - \frac{1}{\text{ما}_1}\right) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

اس لئے ما_1 کی بجائے $-\frac{1}{\text{ما}_1}$ لکھنے سے مطلوبہ مرمیات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^2 - \text{ما}^2 + \text{لا}\,\text{ما}\left(-\frac{1}{\text{ما}_1} + \text{ما}_1\right) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے، اس لئے اس کا تکملہ بھی وہی ہوگا

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{مہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{مہ}} = 1$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم ماسکہ ہیں۔

مثال نمبر۳۔ ر کی مختلف قیمتوں کے لئے صنوبری خطوط کے قبیل

$\text{ر} = \text{ا}\,(1 - \text{جیم}\ \text{طہ})$ کے قائم مرمیات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\frac{d\,r}{d\,\theta}$ = ر جیب طہ

اور ر کو ساقط کرنے سے

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

اس لئے قائم مرمیات کے قبیل کے لئے

$$-\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

یا لوک ر = ۲ لوک جم $\frac{\theta}{2}$ + مستقل

یا ر = ب (۱ + جم طہ)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرنوں کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

امثلہ

۱۔ ر کی مختلف قیمتوں کے لئے مکافیات $y^2 = 4ax$ کے قائم مرمیات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کروکہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متشابہ ناقصوں کے قبیل $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$ کے قائم مرمیات کا نظام $x^{b^2} = k\,y^{a^2}$ ہے۔

۳۔ ر کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں کے قبیل ر = ا و$^{\theta \cot \alpha}$ کے قائم مرمیات معلوم کرو۔

۴۔ ر کی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکافیوں $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ کے قائم مرمیات کا قبیل معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

لا³ − ۳ لا ما² = ا
۳ لا² ما − ما³ = ب

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجب² عد = ا (جم طہ − جم عد)
اور رجبز² یہ = ا (جمزیہ − جم طہ)
علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = ی + خ و تو ثابت کرو کہ
ی = ا اور و = ب
قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل
جمزلا قم ما − مہ مم ما = مستقل
قبیل مہ ممزلا − قمزلا جم ما = مستقل کے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ [لنڈن سنہ ۱۸۹۰]

علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

۵۱ ۔ مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{ی}}{\text{فر طہ}^2}$ + ی = فَ (ی)
ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

۲ $\frac{\text{فر ی}}{\text{فر طہ}}$ کے ساتھ ضرب دینے اور تکمل کرنے سے

$\left(\frac{\text{فر ی}}{\text{فر طہ}}\right)^2$ + ی² = ۲ ف (ی) + ا

جسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $\int \frac{\text{دی}}{(\text{۱+۲ف(ی)-ی}^{2})^{\frac{1}{2}}} = \text{ط+ب}$

اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲ — $\frac{\text{د}^{2}\text{ی}}{\text{دط}^{2}} + \text{ن}^{2}\text{ی} = \text{ف(ط)}$ مستقل سروں والی ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔

جب ن ط کے ساتھ ضرب دو جو مکمل جزوِ ضربی ہے تکمل کرنے سے

$$\text{جب ن ط}\ \frac{\text{دی}}{\text{دط}} - \text{ن ی جم ن ط} = \int^{\text{ط}} \text{ف(طَ) جب ن طَ دطَ} + \text{ا}$$

اسی طرح جم ن ط متکمل جزوِ ضربی ہے اور اس کے جواب میں پہلا تکملی

$$\text{جم ن ط}\ \frac{\text{دی}}{\text{دط}} + \text{ن ی جب ن ط} = \int^{\text{ط}} \text{ف(طَ) جم ن طَ دطَ} + \text{بَ}$$

$\frac{\text{دی}}{\text{دط}}$ کو ساقط کرنے سے

$$\text{ن ی} = \int^{\text{ط}}_{\text{ب}} \text{ف(طَ) جب ن (ط - طَ) دطَ} + \text{ب جب ن ط} - \text{ا جم ن ط}$$

۵۳ — ایک ایسے جسم کی مساواتِ حرکت جس کی کمیت بدلتی ہو اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{د}}{\text{دت}} \left\{ \text{فہ (لا)}\ \frac{\text{دلا}}{\text{دت}} \right\} = \text{سا (لا)}$$

اور اس کا متکمل جزو ضربی $\text{فہ(لا)}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ ہے۔

کیونکہ $\text{فہ(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \frac{\text{فر}}{\text{فرت}} \left\{ \text{فہ(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \right\} = \text{سا(لا)}\ \text{فہ(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{۱}{۲} \left\{ \text{فہ(لا)} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} \right\}^{۲} = \int \text{سا(لا)}\ \text{فہ(لا)}\ \text{فرلا} + \text{ا}$

$$\text{یا} \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}} \int \frac{\text{فہ(لا)}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\int \text{سا(لا)}\ \text{فہ(لا)}\ \text{فرلا} + \text{ا}}} = \text{فرت}$$

متغیر جدا ہو گئے ہیں، پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ف}(\text{ا لا} + \text{ب ما})$

فرض کرو کہ $\text{ا لا} + \text{ب ما} = \text{ی}$

تب $\text{ا} + \text{ب} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

پس $\text{ا} + \text{ب ف(ی)} = \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

اور $\text{فرلا} = \frac{\text{فری}}{\text{ا} + \text{ب ف(ی)}}$

یا $\text{لا} + \text{ج} = \int \frac{\text{فری}}{\text{ا} + \text{ب ف(ی)}}$

مثال ۲- لا^۲ (فرما/فرلا) (ما + لا فرما/فرلا) + ۱ = ۰

رکھو لا ما = ی

تب ما + لا فرما/فرلا = فری/فرلا

∴ لا (فری/فرلا − ما) فری/فرلا + ۱ = ۰

یا ی = لا فری/فرلا + ۱/(فری/فرلا)

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے

لا ما = لا ج + ۱/ج

مثال ۳- و^{۲(لا+ما)} (۱ − فرما/فرلا)^۲ = و^{۲لا} + و^{۲ما} (فرما/فرلا)^۲ کو حل کرو

فرض کرو کہ و^ما = عا اور و^لا = ضا

اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

(و^ما − و^ما فرما/فرلا)^۲ = ۱ + (و^ما فرما / و^لا فرلا)^۲

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

عا − ضا فرعا/فرضا = √(۱ + (فرعا/فرضا)^۲)

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

عا = ج ضا + √(۱ + ج^۲)

یا و^ما = ج و^لا + √(۱ + ج^۲)

مثال ۴۔ $ا لا ما \left(\frac{ڈ ما}{ڈ لا}\right)^{۲} + (لا^{۲} - ا ما^{۲} - ب)\frac{ڈ ما}{ڈ لا} - لا ما = ۰$

(ہندسۂ مجسمات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو $لا = \sqrt{س}$ اور $ما = \sqrt{ت}$

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

$$ا \sqrt{س ت}\left(\frac{\sqrt{س}\, ڈ ت}{\sqrt{ت}\, ڈ س}\right)^{۲} + (س - ا ت - ب)\left(\frac{\sqrt{س}\, ڈ ت}{\sqrt{ت}\, ڈ س}\right) - \sqrt{س ت} = ۰$$

$$یا \quad ا س \left(\frac{ڈ ت}{ڈ س}\right)^{۲} + (س - ا ت - ب)\frac{ڈ ت}{ڈ س} - ت = ۰$$

$$یعنی \quad ت\left(۱ + ا \frac{ڈ ت}{ڈ س}\right) = س \frac{ڈ ت}{ڈ س}\left(۱ + ا \frac{ڈ ت}{ڈ س}\right) - ب \frac{ڈ ت}{ڈ س}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ت = س \frac{ڈ ت}{ڈ س} - ب \frac{\frac{ڈ ت}{ڈ س}}{۱ + ا \frac{ڈ ت}{ڈ س}}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

$$ت = س ج - \frac{ب ج}{۱ + ا ج}$$

$$یا \quad ج لا^{۲} - ما^{۲} = \frac{ب ج}{۱ + ا ج}$$

اس کا نادر حل ہے $لا \pm \sqrt{-ا}\, ما = \pm \sqrt{ب}$

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔ $(۱ + ا لا^{۲})\frac{ڈ^{۲} ما}{ڈ لا^{۲}} + ا لا \frac{ڈ ما}{ڈ لا} + ق^{۲} ما = ۰$ کو حل کرو

فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\text{دت} = \frac{\text{دما}}{\sqrt{1+\text{ا}\,\text{لا}^2}}$$

اس طرح لا سیدھے تکمل سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہوسکتا ہے

اب $$\frac{\text{دما}}{\text{دلا}} = \frac{\frac{\text{دما}}{\text{دت}}}{\sqrt{1+\text{ا}\,\text{لا}^2}}$$

اور $$\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دلا}^2} = \frac{\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دت}^2}}{1+\text{ا}\,\text{لا}^2} - \frac{\text{دما}}{\text{دت}}\,\frac{\text{ا}\,\text{لا}}{(1+\text{ا}\,\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

پس $$(1+\text{ا}\,\text{لا}^2)\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دلا}^2} = \frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دت}^2} - \text{ا}\,\text{لا}\,\frac{\text{دما}}{\text{دت}} \times \frac{\text{دت}}{\text{دلا}}$$

پس مساوات معلومہ اس طرح کی مساوات $\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دلا}^2} + \text{ق}^2\,\text{ما} = 0$

میں تحویل ہو جاتی ہے، جس کا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}\ \text{جب}\ \text{ق}\ \text{ت} + \text{ب}\ \text{جم}\ \text{ق}\ \text{ت}$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم حاصل ہوتا ہے۔

[i] اگر ا مثبت ہو تو

$$\text{دت} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}}}\,\frac{\text{دلا}}{\sqrt{\frac{1}{\text{ا}}+\text{لا}^2}}$$

$$\text{ت} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}}}\,\text{جبز}^{-1}(\text{لا}\sqrt{\text{ا}})$$

اگر ا منفی ہو تو $$\text{دت} = \frac{1}{\sqrt{-\text{ا}}}\,\frac{\text{دلا}}{\sqrt{-\frac{1}{\text{ا}}-\text{لا}^2}}$$

یعنی $\frac{1}{\sqrt{ر}}$ جب$^{-1}$ (لا $\sqrt{ر}$) = ت]

مثال ۶ - ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سروں والی خطی مساواتیں ہیں)

$$۴ \frac{د لا}{د ت} + ۹ \frac{د ما}{د ت} + ۴۴ لا + ۴۹ ما = ت$$

$$۳ \frac{د لا}{د ت} + ۷ \frac{د ما}{د ت} + ۳۴ لا + ۳۸ ما = و^{ت}$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، عف ' $\frac{د}{د ت}$ کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۴ (عف + ۱۱) لا + (۹ عف + ۴۹) ما = ت$$

$$(۳ عف + ۳۴) لا + (۷ عف + ۳۸) ما = و^{ت}$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۷ عف + ۳۸ اور ۹ عف + ۴۹ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$[(۴ عف + ۴۴)(۷ عف + ۳۸) - (۳ عف + ۳۴)(۹ عف + ۴۹)] لا$$

$$= ۷ + ۳۸ ت - ۵۸ و^{ت}$$

$$\text{یا } (عف^{۲} + ۷ عف + ۶) لا = ۷ + ۳۸ ت - ۵۸ و^{ت}$$

جس سے ملتا ہے $لا = ا و^{-ت} + ب و^{-۶ت} + \frac{1}{عف^{۲} + ۷ عف + ۶} (۷ + ۳۸ ت - ۵۸ و^{ت})$

$$\text{یا } لا = ا و^{-ت} + ب و^{-۶ت} + \frac{۷}{۶} + \frac{۱۹}{۳} (ت - \frac{۷}{۶}) - \frac{۲۹}{۷} و^{ت}$$

ما کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{د ما}{د ت}$ کو اصلی مساواتوں سے ساقط

کرتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{۲لا} + \text{ما} = \text{۷ت} - \text{۹و}^{\text{ت}}$$

$$\text{پس ما} = \text{۷ت} - \text{۹و}^{\text{ت}} - \text{۲لا} - \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{۷ت} - \text{۹و}^{\text{ت}} - \text{۲}\left(\text{او}^{\text{ت}} + \text{ب و}^{\text{-۶ت}} + \frac{\text{۱۹}}{\text{۳}}\text{ت} - \frac{\text{۵۶}}{\text{۹}} - \frac{\text{۲۹}}{\text{۷}}\text{و}^{\text{ت}}\right)$$

$$- \left(\text{-او}^{\text{ت}} - \text{۶ب و}^{\text{-۶ت}} + \frac{\text{۱۹}}{\text{۳}} - \frac{\text{۲۹}}{\text{۷}}\text{و}^{\text{ت}}\right)$$

$$= \text{-او}^{\text{ت}} + \text{۴ب و}^{\text{-۶ت}} + \frac{\text{۵۵}}{\text{۹}} - \frac{\text{۱۷}}{\text{۳}}\text{ت} + \frac{\text{۲۴}}{\text{۷}}\text{و}^{\text{ت}}$$

$$\text{پس لا} = \text{او}^{\text{ت}} + \text{ب و}^{\text{-۶ت}} + \frac{\text{۱۹}}{\text{۳}}\text{ت} - \frac{\text{۵۶}}{\text{۹}} - \frac{\text{۲۹}}{\text{۷}}\text{و}^{\text{ت}}$$

$$\text{ما} = \text{-او}^{\text{ت}} + \text{۴ب و}^{\text{-۶ت}} - \frac{\text{۱۷}}{\text{۳}}\text{ت} + \frac{\text{۵۵}}{\text{۹}} + \frac{\text{۲۴}}{\text{۷}}\text{و}^{\text{ت}}$$

[طالب علم $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کے اسقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{لا}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} + \text{۳}\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{۱۲لا} = \text{۰}$$

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرت}^{\text{۲}}} - \text{۵}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{۹ما} = \text{۰}$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں

$(\text{عف}^2 + ۱۶)\,\text{لا} + ۳\,\text{عف}\,\text{ما} = ۰$

$-۵\,\text{عف}\,\text{لا} + (\text{عف}^2 + ۹)\,\text{ما} = ۰$

ان مساواتوں پر بالترتیب $\text{عف}^2 + ۹$ اور ۳ عف کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$[(\text{عف}^2 + ۱۶)(\text{عف}^2 + ۹) + ۱۵\,\text{عف}^2]\,\text{لا} = ۰$

یا $(\text{عف}^4 + ۴۰\,\text{عف}^2 + ۱۴۴)\,\text{لا} = ۰$

یعنی $(\text{عف}^2 + ۴)(\text{عف}^2 + ۳۶)\,\text{لا} = ۰$

جس سے لا = ا جب ۲ت + ب جم ۲ت + ج جب ۶ت + د جم ۶ت

ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفرق کرو اور دوسری کے سہ چند کو اس سے تفریق کرو، اس طرح ملیگا

$$\frac{\text{د}^3\text{لا}}{\text{دت}^3} + ۳۱\,\frac{\text{دلا}}{\text{دت}} = ۲۷\,\text{ما}$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے (بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے)

$$\text{ما} = -۲\text{ب جب ۲ت} + ۲\text{ا جم ۲ت} + \frac{۱۰}{۹}\text{د جب ۶ت} - \frac{۱۰}{۹}\text{ج جم ۶ت}$$

امثلہ

۱- $۲\,\text{لا}\,\text{ما}\,\frac{\text{دما}}{\text{دلا}} - (۱ - \text{لا})\,\text{ما}^2 = \text{لا}^2$

۲- $\text{قط}^2\,\text{ما}\,\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دلا}^2} + ۲\,\frac{\text{جب ما}}{\text{جم}^3\,\text{ما}}\left(\frac{\text{دما}}{\text{دلا}}\right)^2 + \text{مس ما} = \text{لا}$

۳- $(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\text{لا})^2\,\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دلا}^2} + \text{و}(\text{ا}_1 + \text{ب}_1\text{لا})\,\frac{\text{دما}}{\text{دلا}} + \text{ب ما} = \text{لا}$

۴- $(۱ + \text{لا}^2)^2\,\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{دلا}^2} + ۲\,\text{لا}(۱ + \text{لا}^2)\,\frac{\text{دما}}{\text{دلا}} + \text{ما} = ۰$

۵- $(\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ن}^{\text{۲}}\,\text{ما} = \text{۰}$

۶- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا}-\text{ما}}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{\text{ما}}\right)$

۷- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۲ جب}\,\frac{\text{لا}-\text{ما}}{\text{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{۲}}\quad\frac{\text{جم لا}}{\text{جم ما}}$

۸- ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکملی حاصل کرو

(ا) $\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۳}}} - \text{۳}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۹}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۱۳ ما} = \text{۰}$

(ب) $\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۶}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۹ ما} = \text{۲۵ جم لا}$

(ج) $\text{لا}^{\text{۲}}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{۵ لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{۱۰ ما} = \text{۰}$ [آئی، سی، ایس ۱۸۹۴]

۹- ذیل کی ہمزاد مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۱۵ ما} + \text{۳ ی} + \text{۳۰} = \text{۰}$$

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\,\text{ی}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} + \text{۲ ما} + \text{۱۰ ی} + \text{۴} = \text{۰}$$ [آئی، سی، ایس ۱۸۹۴]

۱۰- اُس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اُس نقطہ کے محددوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱- ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحنا ایسے بدلتا ہے جیسے اُس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲- جس منحنی میں انحنا کے نصف قطر کا ظل محور ما پر مستقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

(۱) س ∞ لوک مس (π/۴ + سا/۲)

(۲) ما ∞ لوک قط لا/ا

نوٹ۔ (۱) میں س قوس کا طول ہے اور سا مماس کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔



جوابات

صفحہ (۶)

۱- لا مس لا - لوک قط لا = ما مس ما - لوک قط ما + ج

۲- $\frac{\text{لا}^{3}-\text{ما}^{3}}{3}+\frac{\text{لا}^{2}-\text{ما}^{2}}{2}$ + لا - ما = ج

۳- ۲ لا ما + لا + ما + ج (لا + ما + ۱) = ۱

۵- لوک $\sqrt{\text{۱ + ما}^{2}}$ = لوک لا + مس$^{-1}$ لا + ج

۶- ۳ (و$^{\text{ما}}$ - و$^{\text{لا}}$) = لا^{3} + ج

۹- (۱) ما = ج و$^{\text{لا}/\text{ا}}$ (۲) ما^{2} = ۲ ا لا + ج

(۳) ر (ج - طہ) = ا (۴) ر = ا طہ + ج

۱۰- لا = $\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{ما}^{2}}$ + $\frac{\text{ا}}{2}$ لوک $\frac{\text{ا}-\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{ما}^{2}}}{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{ما}^{2}}}$ اگر ما = ا جبکہ لا = ۰

صفحہ (۱۱)

۱- ۲ ما و$^{\text{مس}^{-1}\text{لا}}$ = و$^{2\,\text{مس}^{-1}\text{لا}}$ + ج

۲- (ا^{2} + ب^{2}) ما = ا جب ب لا - ب جم ب لا + ج و$^{-\text{ا لا}}$

۳ — ر طہ = ا $\frac{طہ^{ن+۲}}{ن+۲}$ + ج

۴ — ۴ لا ما = ما^۲ + ج ۵ — لا و^{مس^{-۱} ما} = مس^{-۱} ما + ج

۶ — ما و^{۲√لا} = ۲√لا + ج ۸ — لا^۲ + ا^۲ + ر لا + $\frac{ا^۲}{۲}$ = ج و^{-لا^۲/۲}

۹ — $\frac{۱}{لا ما}$ = $\frac{۱}{۲ لا^۲}$ + ج ۱۰ — $\left(\frac{۱}{لا ما}\right)^{ن-۱}$ = $\frac{۱}{۲ لا^{۲ن-۲}}$ + ج

۱۱ — $\frac{۱}{ما^{ن-۱}}$ = ۱ + ج و^{(ن-۱) لا^۲/۲} ۱۲ — $\frac{۱}{لا جب ما}$ = $\frac{۱}{۲ لا^۲}$ + ج

۱۳ — $\frac{۱}{لا لوک ی}$ = $\frac{۱}{۲ لا^۲}$ + ج ۱۴ — و^{-(ن-۱) ی} = ۱ + ج و^{(ن-۱) لا^۲/۲}

۱۵ — $\frac{۱}{ر}$ = $\frac{۱}{طہ}$ + ج و^{طہ} ۱۶ — $\frac{۱}{ر^{ن-۱}}$ = $\frac{۱}{و^{ن-۱}}$ + ج و^{(ن-۱) طہ}

۱۸ — (۱) $\frac{و^{-ما}}{لا}$ = $\frac{۱}{۲ لا^۲}$ + ج (۲) (ا^۲ + ب^۲) و^{ما} = ا جب ب لا - ب جم ب لا + ج و^{-لا}

(۳) $\frac{جب ما}{۱+لا}$ = و^{لا} + ج (۴) ف (ما) + فہ (لا) + ۱ = ج و^{فہ (لا)}

صفحہ (۱۷)

۱ — $\frac{۱}{۲}$ لوک (د^۲ + د - ۱) + $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}$ لوک $\frac{۲د + ۱ - \sqrt{۵}}{۲د + ۱ + \sqrt{۵}}$ + لوک لا = ج جہاں د = $\frac{ما}{لا}$

۲ — $\frac{۱}{۲}$ لوک (۲ د^۲ + د - ۳) + $\frac{۹}{۲\sqrt{۲۳}}$ لوک $\frac{۱۲د + ۱ - \sqrt{۲۳}}{۱۲د + ۱ + \sqrt{۲۳}}$ + لوک لا = ج

جہاں و = ما / لا

۳- ۱/لا - ۱/ما = ج   ۴- ع، حاصل اسقاط ما = لا(ع + ع^{2}) اور لا = ج/۳ع و$^{1/2ع^{2}}$ کا

۵- ع، حاصل اسقاط ذیل کی مساواتوں کا

ما = لا(ا ع^{2} + ب ع + ج)

اور لوک لا {ا ع^{2} + (ب - ۱) ع + ج}

+ ۲ / √(۴اج - (ب - ۱)^{2}) مس$^{-1}$ (۲اع + ب - ۱) / √(۴اج - (ب - ۱)^{2}) = مستقل

صفحہ (۲۰)

۱- (ما - لا)^{5} = ج (ما + لا)   ۲- (ما - لا)^{3} = ج (ما + لا - ۲)

۳- (۲ + √۳)/(۲√۳) لوک (ما/(لا - ۱) + ۱ + √۳) - (۲ - √۳)/(۲√۳) لوک (ما/(لا - ۱) + ۱ - √۳)
+ لوک (لا - ۱) = ج

۴- (ا + ب) لوک (ما - لا + ۱) + (ا - ب) لوک (ما + لا - ۱) = ج

۵- لا - ما + لوک (لا + ما) = ج

۶- ۶ما - ۳لا = لوک (۳لا + ۳ما + ۲) + ج

۷- ۳لا^{2} + ۴لا ما + ۳ما^{2} - ۱۰لا - ۱۰ما + ج = ۰

۸- لا + ما - ۴ لوک (۲لا + ۳ما + ۷) = ج

صفحہ (۲۵)

۱- ما^۲ + ۱ = ج و^{۲لا}　　۲- ما = لا^۲/۲ + لوک لا + ج

۳- ما + ۲/۳ (ا + لا)^{۳/۲} - ۲ ا (ا + لا)^{۱/۲} = ج

۴- لا (لا + ۲ ا)^۳ = ج و^{۲ما/ا}

۵- ۴ ا لا = ما^۲ + ۳ ا ما - ۳ا^۲/۲ لوک (۲ ما + ا) + ج

۶- جم { (۱ - ۲(لا - ا) - ما)^{۱/۲} / (ا - لا) } = ا - لا

۷- لا = ۳/۲ ا ع^۲ + ۲ ب ع + ج
　ما = ا ع^۳ + ب ع^۲

۸- ما = ۳/۲ ا ق^۲ + ۲ ب ق + ج
　لا = ا ق^۳ + ب ق^۲

صفحہ (۲۸)

۱- ما = ج لا + ج^۲ ، لا^۲ + ۴ ما = ۰

۲- ما = ج لا + ج^۳ ، ۲۷ ما^۲ + ۴ لا^۳ = ۰

۳- ما = ج لا + ج^ن ، ن^ن ما^{ن-۱} + (ن - ۱)^{ن-۱} لا^ن = ۰

۴— ما = ج لا + $\sqrt{}$ (ا^{۲} ج^{۲} + ب^{۲}) ، لا^{۲}/ا^{۲} + ما^{۲}/ب^{۲} = ۱ ، ۰

۵— ما = (لا - ا) ج - ج^{۲} ، (لا - ا)^{۲} = ۴ ما

۶— (ما - ج لا) (ج - ۱) = ج ، $\sqrt{}$لا + $\sqrt{}$ما = ۱

صفحہ (۳۰)

۱— ما = ع^{۲} لا + ع

لا = (لوک ع - ع + ج) / (ع - ۱)^{۲}

۲— ما = ا ع لا + ع^{۲}

لا = ع^{۲}/(۱ - ۲ا) + ج ع$^{ا/(۱-ا)}$

۳— ما = ع^{۲} لا + ع^{۳}

لا (ع - ۱)^{۲} = - ع^{۳} + $\frac{۳}{۲}$ ع^{۲} + ج

۴— ما = (ع + ع^{۲}) لا + $\frac{۱}{ع}$

ع^{۲} لا = ۱ + ا و$^{\frac{۱}{ع}}$

۵— ما = (ع + ع^{ن}) لا + $\frac{۱}{ع^{ن-۱}}$

ع^{ن} لا = (ن - ۱) + ا و$^{\frac{۱}{(ن-۱) ع^{ن-۱}}}$

۶— ما = ۲ ع لا + ع^{ن}

ع^{۲} لا = - $\frac{ن}{ن+۱}$ ع$^{ن+۱}$ + ا

۷۔ ما = ا ع لا + ب ع^۲

لا ع^(ا/ا-۱) = - ۳ب/(۳ا-۲) ع^((۳ا-۲)/(ا-۱)) + ج

۸۔ قائم زائد

۹۔ مکافی جو محوروں کو مس کرتا ہے ۱۰۔ قطع زائد

۱۱۔ چار قرنوں والا در تدویر لا^(۲/۳) + ما^(۲/۳) = ا^(۲/۳)

۱۲۔ ۸ ما = (۲ لا - ۱)^۲

۱۳۔ ما = ا و^لا + ج (۱ + و^۲)^(۳/۲)

ما = ج (۳ جب^۲ طہ - ۱)/(جم^۳ طہ)

لا = لوک (۳ ج جب طہ)/(جم^۲ طہ)

۱۴۔ ما^۲ = ج لا^۲ - ب ج/(ا ج + ۱)، مخروطیوں کا ایک سلسلہ جو چار خطوط

مستقیم لا ± √(-ا) ما = ± √ب کو مس کرتا ہے نادر حل ہے

صفحہ (۳۶)

۱۔ ما = لا لوک لا + ا لا + ب ۲۔ ما = ا جمر (لا/ا + ب)

۳۔ ۲ ما = لا^۲/۲ا - ا لوک لا + ب ۴۔ ما = (لا + ۳ا)^۳/۲۷ + ب

۵۔ (لا - ا)^{2} + (ما - ب)^{2} = ر^{2} ۶۔ لا + ب = ∫ ور ما / √(ا قو^{۲ما} + ½ - ما)

۷۔ ما + ب = ∫ √(ا قو$^{-۲لا}$ + ½ - لا) ولا

۸۔ ما/لا = ∫ (۱/لا + ۱/۲لا) قو$^{-لا^{2}/۲}$ ولا + ب

۹۔ ما = ب سس (لا + ما + ا)/۲ب

۱۰۔ لا + ا + √(ا - ما^{2})/ما + جب$^{-1}$ ما = ۰

۱۱۔ ما = ب لا^{2} - ا لا لوک لا

صفحہ (۴۲)

۱۔ لا^{5} ما = قو^{لا} + ا لا^{2} + ب لا + ج

۲۔ (لا^{2} + جب لا) ما = جم لا + ا لا^{2} + ب لا + ج

۳۔ (ا) لا^{3} ما$_{3}$ - ۳ لا^{2} ما$_{2}$ + ۶ لا ما$_{1}$ + (لا - ۶) ما = قو^{لا} + ا

(ب) لا ما$_{2}$ - ما$_{1}$ + ما/لا = قو^{لا} + ا

(ج) لا^{5} ما$_{5}$ - ۴ لا^{4} ما$_{4}$ + ۱۶ لا^{3} ما$_{3}$ - ۴۸ لا^{2} ما$_{2}$ + ۹۶ لا ما$_{1}$ - ۹۶ ما

+ ½ (لا^{2} + ما^{2}) = لا (لوک لا - ۱) +

صفحہ (۵۵)

اس نمبری کے جوابات میں ا₁، ب₁، ج₁ وغیرہ اختیاری مستقل ہیں۔

۱- $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}_1\,\text{و}^{۲\text{لا}}$ ۲- $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}_1\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_1\,\text{و}^{۳\text{لا}}$

۳- $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}_1\,\text{و}^{۳\text{لا}} + \text{ج}_1\,\text{و}^{۵\text{لا}}$ ۴- $\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ب}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ج}_1\,\text{و}^{-۲\text{لا}}$

۵- $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{ج}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲}$

۶- $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ب}_1\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{ج}_1\,\text{جب}\,\text{لا} + \text{د}_1\,\text{جم}\,\text{لا}$

۷- $\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ب}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}} + (\text{ج}_1 + \text{د}_1\,\text{لا} + \text{ع}_1\,\text{لا}^۲)\,\text{و}^{۲\text{لا}}$

۸- $\text{ما} = \text{ا}_1\,\text{جب}\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{جم}\,\text{لا} + \text{ج}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{د}_1\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲}$

۹- $\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ب}_1\,\text{لا})\,\text{جب}\,\text{لا} + (\text{ج}_1 + \text{د}_1\,\text{لا})\,\text{جم}\,\text{لا} + (\text{ع}_1 + \text{ف}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}}$

۱۰- $\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ب}_1\,\text{لا} + \text{ج}_1\,\text{لا}^۲)\,\text{جب}\,\text{لا} + (\text{د}_1 + \text{ع}_1\,\text{لا} + \text{ف}_1\,\text{لا}^۲)\,\text{جم}\,\text{لا}$

$+ (\text{گ}_1 + \text{ه}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + (\text{س}_1 + \text{ص}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲}$

۱۱- $\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ب}_1\,\text{لا} + \text{ج}_1\,\text{لا}^۲)\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{د}_1\,\text{و}^{۲\text{لا}} + (\text{ع}_1 + \text{ف}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{-\text{لا}}\,\text{جب}\,\text{لا}$

$+ (\text{گ}_1 + \text{ه}_1\,\text{لا})\,\text{و}^{-\text{لا}}\,\text{جم}\,\text{لا}$

۱۲ـ ما = (ا۱ + ب۱ لا) جب ۲لا + (ج۱ + د۱ لا) جم ۲لا + ع جب ب لا

+ ف۱ جم ب لا + گ۱ قو^(ج لا/۲) جب (ج لا √۳)/۲ + ھ۱ قو^(ج لا/۲) جم (ج لا √۳)/۲

+ س۱ قو^(-ج لا/۲) جب (ج لا √۳)/۲ + ص۱ قو^(-ج لا/۲) جم (ج لا √۳)/۲

صفحہ (۵۹)

۱ـ (۱) قو^لا / ۴	(۲) قو^(ا لا) / (ا (ا+۱) (ا+۲))	(۳) قو^لا / ۱۲۰ + قو^(-لا) / ۱۲۰

صفحہ (۶۲)

قو^لا لا^۵ / ۶۰ ، ـ قو جب لا ، لا قو^لا لوک_و (لا / قو)

صفحہ (۶۳)

۱ـ قو^(ا لا) (ا^۲ + ب^۲)^(-۱/۲) جم (ب لا ـ مس^(-۱) ب/ا)

قو^لا / ۲ ـ قو^لا / (۵√۲) جم (۲لا ـ مس^(-۱) ۲)

قو^لا / ۴ { ۳ / (۲√۲) جب (لا ـ π/۴) ـ ۱ / √۱۰ جب (۳لا ـ مس^(-۱) ۳) }

۱/۲ (جب لا جمز لا ـ جم لا جبز لا)

٢- $-\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جب ٢ لا ، $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ جم لا ، $-\frac{\text{٣}}{\text{١٦}}$ جب ٢ لا

صفحہ (٦٥)

$\text{و}^{\text{لا}}$ (جب لا - جم لا) ، $\text{و}^{\text{لا}} \frac{\text{٤ ا (ا}^{\text{٢}}\text{ - ١) جب ا لا + (ا}^{\text{٤}}\text{ - ٦ ا}^{\text{٢}}\text{ + ١) جم ا لا}}{\text{ا (ا}^{\text{٢}}\text{ + ١)}}$ ،

٢- جم لا جمز لا

صفحہ (٦٧)

١- $\frac{\text{لا}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ لا + $\frac{\text{٧}}{\text{٤}}$ ، $-\frac{\text{لا}^{\text{٢}}}{\text{٢}}$ - لا ، $\frac{\text{لا}^{\text{٣}}}{\text{٦}}$ + $\text{لا}^{\text{٢}}$

٢- $\text{و}^{\text{لا}} \left(\frac{\text{لا}^{\text{٢}}}{\text{٦}} - \frac{\text{٥}}{\text{١٨}}\text{لا} + \frac{\text{١٩}}{\text{١٠٨}}\right)$ ، $\text{و}^{\text{لا}} \left(\frac{\text{لا}^{\text{٢}}}{\text{٤}} - \frac{\text{لا}}{\text{٢}}\right) + \text{و}^{\text{-لا}} \left(\frac{\text{لا}}{\text{٤}} + \frac{\text{٣}}{\text{٨}}\right)$

٣- $\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{و}^{\text{لا}}$ (لا جب لا + جم لا) ، $-\frac{\text{و}^{\text{-لا}}}{\text{١٠}} \left\{\left(\text{٢ لا} + \frac{\text{٣}}{\text{٥}}\right)\text{جم لا} - \left(\text{لا} + \frac{\text{٤}}{\text{٥}}\right)\text{جب لا}\right\}$

صفحہ (٧٢)

١- (١) $-\frac{\text{لا جم لا}}{\text{٢}}$ (٢) $\frac{\text{لا جب ٢ لا}}{\text{٤}}$ (٣) $\frac{\text{لا}}{\text{٢}}$ جمز لا

(٤) $\text{و}^{\text{لا}} \left(\frac{\text{لا}^{\text{٢}}}{\text{٦}} - \frac{\text{لا}}{\text{٣}}\right)$ (٥) $\frac{\text{لا و}^{\text{لا}}}{\text{٢}}$ (٦) $\frac{\text{لا}}{\text{٤}}$ (جمز لا + جم لا)

(٧) $\frac{\text{لا}}{\text{٢ ا (ا}^{\text{٢}}\text{ - ب}^{\text{٢}}\text{)}} \left(\frac{\text{و}^{\text{ا لا}}}{\text{ا}} - \frac{\text{و}^{\text{ب لا}}}{\text{٢ ب}} + \frac{\text{و}^{\text{-ب لا}}}{\text{٢ ب}}\right)$ (٨) $\frac{\text{لا}}{\text{٦}}$ جب لا $\text{جب}^{\text{٢}} \frac{\text{لا}}{\text{٢}}$

٢- (١) ما = $\text{ا}_{\text{١}} \text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{\text{٢}} \text{و}^{\text{-لا}} + \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{و}^{\text{٢ لا}}$

(۲) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{۲}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \frac{۱}{۲}\,\text{لا جبز لا}$

(۳) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{جب لا} + \text{ا}_{۲}\,\text{جم لا} + \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \frac{\text{لا جب لا}}{۲} + \text{لا}^{۳} - ۶\,\text{لا} + \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۵}(\text{جب لا} - ۲\,\text{جم لا})$

(۴) $\text{ما} = (\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{۳}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{ا}_{۴}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{ا}_{۵}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۷۲}(۲\,\text{لا}^{۳} - ۹\,\text{لا}^{۲})$

(۵) $\text{ما} = \text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا} + \text{ا}_{۳}\,\text{لا}^{۲} + \text{ا}_{۴}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{۵}\,\text{و}^{-\text{لا}} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۲۴}$

(۶) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{ا}_{۲}\,\text{و}^{\text{لا}(\sqrt{۳}+۲)} + \text{ا}_{۳}\,\text{و}^{\text{لا}(\sqrt{۳}-۲)} + \frac{\text{لا}}{۶}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{لا} + ۳$

(۷) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{۲}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \text{ا}_{۳}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}}{۲}}\,\text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}\left\{(\text{لا} - ۳)\,\text{جم لا} - \text{لا جب لا}\right\}$

(۸) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{۲}\,\text{و}^{-\text{لا}} - \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۲۵}\left\{(۱۰\,\text{لا} + ۲)\,\text{جم لا} + (۵\,\text{لا} - ۱۴)\,\text{جب لا}\right\}$

(۹) $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ا}_{۲}\,\text{و}^{-\text{لا}} - \frac{۱}{۵}\,\text{جم لا جبز لا} + \frac{۲}{۵}\,\text{جب لا جبز لا} + \frac{\text{ا}^{\text{لا}}}{\text{لوک}(\text{او})\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}}{\text{و}}}$

(۱۰) $\text{ما} = (\text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{لا})\,\text{و}^{\text{لا}} + (\text{ا}_{۳} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا})\,\text{جب لا} + (\text{ا}_{۵} + \text{ا}_{۶}\,\text{لا})\,\text{جم لا}$

+ ۱/۲ − ۱/۳۲ لا^۲ جب لا + (لا^۲ وَ^لا)/۸ + لا + ۲

صفحہ (۷۵)

۱ ـ ما = ا۱ جب (ق لوک لا) + ا۲ جم (ق لوک لا)

۲ ـ ما = ا۱ جب (ق لوک لا) + ا۲ جم (ق لوک لا) + (لوک لا)^۲/ق^۲ − ۲/ق^۴
+ لا (ق^۲ جب (لوک لا) − ۲ جم (لوک لا))/(ق^۴ + ۴) − (لوک لا جم (ق لوک لا))/۲ ق

۳ ـ ما = ا۱/لا + ا۲ √لا جب (√۳/۲ لوک لا) + ا۳ √لا جم (√۳/۲ لوک لا)
+ لا/۲ + لوک لا

۴ ـ ما = ا۱/لا + ا۲ لا + ا۳ لا لوک لا + لا (لوک لا)^۲/۴ + لا^۳/۱۶

۵ ـ ما = ا۱ جب {ق/ب لوک (ا + ب لا)} + ا۲ جم {ق/ب لوک (ا + ب لا)}

صفحہ (۸۲)

۱ ـ ۲ لا^۲ + ما^۲ = ب   ۳ ـ ر = ب وَ^(طہ مس عہ)   ۴ ـ ۲ب/ر = ۱ ـ جم طہ

صفحہ (۸۹)

۱ ـ رکھو ما^۲ = لا ی، ما^۲ = لا^۳ − ۲ لا^۲ + ۲ لا + ج لا وَ^لا

۲ ـ رکھو مس ما = ی، مس ما = ا جم لا + ب جب لا + لا

۳- رکھو ا$_{1}$ + ب$_{1}$ لا = و^{ی} ، ما = ج (ا$_{1}$ + ب$_{1}$ لا)$^{م_{1}}$ + د (ا$_{1}$ + ب$_{1}$ لا)$^{م_{2}}$

- $\frac{\text{ا}}{\text{ب ب}_{1}}$ + $\frac{\text{ا}_{1}\text{ + ب}_{1}\text{ لا}}{\text{ب}_{1}\text{(ب + ا ب}_{1}\text{)}}$

جہاں م$_{1}$ ، م$_{2}$ مساوات ب^{2} م^{2} + (ا ب$_{1}$ - ب$_{1}^{2}$) م + ب = ۰
کی اصلیں ہیں -

۴- رکھو ی = سس$^{-1}$ لا ، ما = (ا لا + ب) / $\sqrt{\text{۱ + لا}^{2}}$

۵- رکھو ی = جب$^{-1}$ لا ، ما = ا جب (ن جب$^{-1}$ لا)
+ ب جم (ن جب$^{-1}$ لا)

۶- رکھو و^{لا} = ضا ، و^{ما} = عا ، (و^{ما} - و^{لا} + ۱) و$^{و^{لا}}$ = ا

۷- رکھو جب لا = ضا ، جب ما = عا ، (جب ما - جب لا + ۱) و$^{جب لا}$ = ا

۸- (ا) ما = ا و$^{-لا}$ + ب و^{لا} جب ۳ لا + ج و^{2لا} جم ۳ لا

(ب) ما = (ا + ب لا) و$^{-3لا}$ + ۲ جم لا + $\frac{3}{2}$ جب لا

(ج) ما = ا لا^{3} جب (لوک لا) + ب لا^{3} جم (لوک لا)

۹- ما + ۲ = ا جب ۳ لا + ب جم ۳ لا + ج جب ۴ لا + د جم ۴ لا
۳ ی = -۲ (ا جب ۳ لا + ب جم ۳ لا) + (ج جب ۴ لا + د جم ۴ لا)

۱۰- ما = ا و$^{ک لا^{2}}$ ۱۱- ما = ک لا^{2} + ا لا + ب

تمت

فہرست اصطلاحات

Canonical form	صورت آئینی
Clairaut's form	کلیروی صورت
Commutative law	قانون مبادلہ
Complementary Function	متمم تفاعل
Complete primitive	کامل ابتدائی
Distributive law	قانون تقسیمی
Elimination	اسقاط
"Exact" Differential Equations	"ٹھیک" یا حاضر مساواتیں
Homogeneous Equations	متجانس مساواتیں
Index law	قانون قوت نما
Irreversible process	غیر انقلاب پذیر عمل
Linear Equations	خطی مساواتیں
Operator	عامل
Order	رتبہ
Orthogonal trajectory	قائم مرمی
Particular integral	خاص تکملی
Rigid Dynamics	استوار اجسام کا علم حرکت
Singular Solution	نادر حل

ترقیم

وما / ولا ، و۲ما / ولا۲ وغیرہ	$\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ect
جف ما / جف لا	$\frac{dy}{dx}$
∫ف (لا) ولا	$\int f(x)dx$
عف (= و / ولا)	$D\left(=\frac{d}{dx}\right)$